

数 列

2002 年 11 月 23 日

1 「数 列」 とは (定義)

の数に 1 番目, 2 番目, 3 番目, と順序をつけて並べたもの, たとえば

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

のようなものを 数列 という。そのおのおのの数を数列の 項 といい, 初めから順序に初項 (第 1 項), 第 2 項, 第 3 項, という。結論的にいえば、数列とは自然数に対応する数の列, 即ち自然数

$$1, 2, 3, 4, \dots, n$$

の関数である。(この視点を大切にしてほしい。)

数列の数が限りなく続くものを無限数列, 有限個で終わるものを有限数列という。有限数列の最後の数を末項という。上の例で「」のところはどんな数が並んでいるかわからないが、よく みれば

$$\text{初項} = \frac{1}{1}, \text{第 2 項} = \frac{1}{2}, \text{第 3 項} = \frac{1}{3}, \dots, \text{すなわち}$$

この数列は, 各項 $= \frac{1}{\text{項の番号}}$ という規則で作られている。

よって 第 100 項 $= \frac{1}{100}$, 第 2317 項 $\frac{1}{2317}$ である。項の番号を n として

第 n 項 $\frac{1}{n}$ …………… (*) と表される。

実際, (*) において, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ とおけばこの数列のすべての項が得られるから, (*) はこの数列の項を一般に代表するものといえよう。そこで, (*) をこの数列の一般項 (または第 n 項) という。初項 (第 1 項) を a_1 , 第 2 項を a_2 , 第 3 項を a_3 , … 第 n 項 (一般項) を a_n と表すことにして a_n が n の式で表せれば 任意の項の番号に対応する数を算出することができる。 a_n が自然数 n の関数という意味がわかるであろう。

【練習 1】次の数列の一般項 (第 n 項) を n の式で表せ。

(1) $1, 3, 5, 7, \dots$

(2) $2, 4, 6, 8, \dots$

$$(3) 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$(4) \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

【練習 2】次の各数列の最初の 5 項を書け。

$$(5) a_n = 3n + 2$$

$$(6) a_n = n^2 + 1$$

$$(7) a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(8) a_n = \frac{1}{1+n^2}$$

【練習 3】次の各数列の一般項を n の式で表せ。

$$(9) 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$(10) 1, 11, 111, 1111, \dots$$

< 註 > $2, 2, 2, \dots$ などという数列は n には関係ないが $a_n = 2$ と表し, このような数列を 定数列 という。

2 等差数列

数列；10, 14, 18, 22, 26, …… や

数列；7, 2, - 3, - 8, - 13, ……

などのように隣り合う 2 項の差 (後の項から前の項を引いた差) が一定の数列を等差数列という。この差を 公差 という。それぞれの数列の公差は 4 と -5 である。

【等差数列の一般項】

初項 $a_1 = a$, 公差を d とする。項の番号 $1, 2, 3, \dots, n$ との対比を作ってみよう。

番号	1	2	3	4	...	n
項	a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$	...	$a + (n - 1)d$

すなわち , 一般項 $a_n = a + (n - 1)d$ で表される。

一般項 $a_n = a + (n - 1)d$

EX1. 次の各数列の一般項を求めよ。また , 第 50 項を求めよ。

100, 93, 86, ……

(解) 初項 $a = 100$, 公差 $d = -7$ であるから

$$a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 107$$

$$n = 50 \text{ のとき , } a_{50} = -7 \cdot 50 + 107 = -243$$

EX2. 第 7 項が - 41 , 第 10 項が - 32 である等差数列において初項と公差を求めよ。また最初に正となる項は第何項か。

(解) 初項を a , 公差を d とするとき ,

$$a_7 = -41, a_{10} = -32 \text{ より}$$

$$\begin{cases} a + 6d = -41 \cdots \textcircled{1} \\ a + 9d = -32 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

これより $a = -59, d = 3$

$$a_n = -59 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 62 > 0 \text{ より } n > 20.66 \cdots$$

n は整数 であるから , $n = 21$

【練習 4】

(1) 数列 $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$ の第 150 項を求めよ。

(2) 等差数列の第 6 項は 50, 第 20 項は 8 である。 - 67 は第何項か。

(3) 等差数列の第 3 項と第 4 項の和が 19, 第 6 項と第 8 項の和が 54 であるという。初項と公差を求めよ。

【練習5 一般問題】次の数列の一般項(第 n 項)を n の式で表せ。

(1) $3, 0, -3, -6, \dots$

(2) $2, 4, 6, 8, \dots$

(3) $22, 42, 62, 82, \dots$

(4) $-1, 1, -1, 1, \dots$

(5) $1, -1, 1, -1, \dots$

(6) $-2, 4, -8, 16, \dots$

(7) $2, -4, 8, -16, \dots$

(8) $9, 99, 999, 9999, \dots$

例3 第 n 項 $a_n = 4n + 3$ であるような数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるか。

(解) $a_1 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$, $a_2 = 4 \cdot 2 + 3 = 11$, $a_3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \dots$ などから公差 4 の等差数列であることが推察される。しかし, これはあくまでも推察したのであって一般性を持ち得ない。

等差数列の定義から隣接した 2 項間の差(後の項から引いた差)が一定であればよいのであるから, 第 $(k+1)$ 番目の項 a_{k+1} から第 k 番目の項 a_k を引いた差が k に関係なく一定(定数)となればよい。

$$a_{k+1} - a_k = 4(k+1) + 3 - (4k + 3) = 4 \implies (\text{一定})$$

よって数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることが証された。(終)

【練習6】一般項(第 n 項)が n の一次式で表される数列は等差数列であることを示せ。

2.1 <等差中項>

3数 a, x, b がこの順で等差数列をなすとき, x を 2数 a, b の等差中項という。

問1 2数 a, b の等差中項を求めよ。

(解) 等差中項を x とする。 a, x, b は等差数列をなすから

$$x - a = b - x \quad \therefore 2x = a + b \quad \text{よって, } x = \frac{a+b}{2} \quad (\text{等差中項})$$

等差中項のことを相加平均 または算術平均ということもある。

一般に, $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$ が等差数列をなすとき, a, b の間にある m 項 $x_1, x_2, \dots, x_m$ を 2数 a, b の間にある m 個の等差中項という。

問2 5 と 33 との間に 6 個の等差中項を入れよ。

2.2 < 等差数列の和 >

Karl Friedrich Gauss(1777~1855) は 19 世紀における著名な数学者であった。複素数を平面上に表し、図形的な問題を(いわゆる複素平面=Gauss 平面)考えたり、また解析学においても大きな業績を残している、代表的な数学者であった。彼は数計算にも異常な才能を持っていたが、8 才のとき小学校で先生が「1 から 40 まで順々に加え合わせよ。」という問題をだして、1 時間はたっぴりかかるだろうと思っていたところ、クラスで最年少の Gauss はたちまち解いてしまった。すなわち、彼は次のように考えたのである。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 38 + 39 + 40 \\ +S = 40 + 39 + 38 + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{cases} \\ \therefore 2S &= \underbrace{41 + 41 + 41 + \cdots + 41 + 41 + 41}_{40 \text{ 個}} \\ &= 41 \times 40 \quad \text{ゆえに } S = \frac{41 \times 40}{2} = 820(\text{答}) \end{aligned}$$

問1 これにならい 1 から n までの自然数の和を求める公式を作れ。

$$\left(1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

問2 等差数列において、初項 a , 末項 l , 項数 n のときの総和を求める公式

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} \quad \text{を導け}$$

問3 問2 によって 初項 a , 公差 d , 項数 n のとき

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \quad \text{を導け}$$

【練習問題】

1 . 次の等差数列の和を求めよ。

(1) $5, 13, 21, \dots$ (第 15 項まで)

(2) $18, 15, 12, \dots$ (第 10 項まで)

(3) $1, 3, 5, \dots$ (第 n 項まで)

2 . 等差数列 $1, 5, 9, \dots$ において, 第 6 項から第 20 項までの和を求めよ。

3 . 第 9 項が 14 , 第 20 項が 47 となる等差数列の第 9 項から第 20 項までの和を求めよ。

4 . 初項が 48 , 公差が -3 である等差数列について 第何項までの和が最大になるか。

5 . 最初の n 項の和 $S_n = 5n^2 - 2n$ なる数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

2.3 < 調和数列 >

たとえば，数列 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ [1]

の各項の逆数をとって数列を作ってみると，

$1, 3, 5, 7, \dots$ となりこれは初項 1, 公差 2 の等差数列となる。このとき，数列 [1] を 調和数列という。

一般に，各項の逆数が等差数列をなすような数列を 調和数列 という。

【練習問題】

1 . 次の数列の第 n 項を求めよ。

(1) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \dots$ (2) $\frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \frac{6}{9}, \frac{6}{12}, \dots$

2 . 直線上に 4 点 A, C, B, D がこの順にあって

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \text{ ならば,}$$

AC, AB, AD は調和数列をなすことを示せ。

(このとき，4 点 A, B, C, D は 調和点列をなすという。)

3 . 3 数 a, x, b が調和数列をなすとき、 x を a, b の調和中項という。 a, b の調和中項 x を求めよ。

2.4 補充問題（群数列の問題）

例題 自然数を 次のように区切る。

$$1|2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9, 10|11, 12, 13, 14, 15|\dots\dots$$

- (1) 第 n 番目の区画の末項を求めよ。 (2) 第 n 番目の区画の初項を求めよ。
(3) 第 n 番目の区画の数の和を求めよ。 (4) 2000 は第何番目の区画の第何番目か。

（解説）(1) 区画を取り除くと、自然数の数列であるから

任意の項＝初項 1 からその数までの項数

たとえば，第 4 番目の区画の末項 10

$$\left\{ \begin{array}{l} = 1 \cdots 1 \text{ 番目の区画の項数} \\ + 2 \cdots 2 \text{ 番目の区画の項数} \\ + 3 \cdots 3 \text{ 番目の区画の項数} \\ + 4 \cdots 4 \text{ 番目の区画の項数} \\ = 10 \cdots \text{と考えられる。} \end{array} \right.$$

一般に 第 n 番目の区画の末項は

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 第 } n \text{ 番目の区画の初項} &= \text{第 } (n-1) \text{ 番目の区画の末項} + 1 \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(3) 第 n 番目の区画の数列は

初項 $\frac{1}{2}(n-1)n + 1$, 公差 1, 項数 n なる等差数列であり

$$\text{その和} = \frac{1}{2}\{(n-1)n + 2 + (n-1) \cdot 1\} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

(4) いま 2000 は 第 n 番目の区画にあるものとする。

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 2000 \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad \therefore n(n-1) < 4000 \leq n(n+1)$$

これを解いて $n=63$ を得る。（各自試みよ。）

第 62 番目の区画の末項は，1953 であるから 2000 は，第 63 番目の区画の 47 番目の数である。

3 等比数列

例えば数列；3, 6, 12, 24, 48, ……①

は 3 に始まり、つぎつぎに 2 をかけてできた数列である

また、数列；36, -18, 9, $-\frac{9}{2}$, ……②

は 36 に始まり、つぎつぎに $-\frac{1}{2}$ をかけてできた数列である

。このように、ある数に一定の数をかけてできた数列を 等比数列といい、この一定の数をその等比数列の 公比という。

①は、初項 3, 公比 2 の等比数列である。

②は、初項 36, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

等比数列の初項, 公比がともに 0 でないとき,

公比 $r = \frac{\text{後の項}}{\text{前の項}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ で表す。

3.1 < 等比数列の一般項＝第 n 項 >

初項 a , 公比 r の等比数列の一般項 (第 n 項) a_n を求めてみよう。

$a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, a_4 = ar^3, \dots$ であるから

$a_n = ar^{n-1}$ と表される。

等比数列の一般項 $a_n = ar^{n-1}$

【練習 1】 次の等比数列の一般項 (第 n 項) を求めよ。また第 7 項を求めよ。

(1) 2, 6, 18, ……

(2) 64, 16, 4, ……

【練習 2】 第 3 項が 54, 第 6 項が 2 である等比数列の初項と公比を求めよ。

【練習 3】 初項 a , 公比 r なる等比数列の初めの n 項の積を求めよ。

3.2 < 等比中項 >

3 数 a, x, b が等比数列をなすとき、 x を a, b の等比中項という。

問 2 数 a, b の等比中項を求めよ。ただし、 $a, b \neq 0$

(これを相乗平均、または幾何平均ともいう。)

3.3 等比数列の和

問 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和 S_n を求める公式を導け。

(解説) $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \cdots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ の両辺に r をかけて

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$(1-r)S_n = a(1-r^n) \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ より, $r \neq 1$ のとき, $\textcircled{3}$ の両辺を $1-r$ で割ると,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(ii) $r = 1$ のとき,

$$\textcircled{1} \text{ にたちかえて, } S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = na$$

以上をまとめると

$$\begin{cases} (i) \ r \neq 1 \cdots \cdots S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ (ii) \ r = 1 \cdots \cdots S_n = na \end{cases}$$

< 練習問題 >

1. 等比数列の初項より第 n 項までの積の平方は, 初項と末項の積の n 乗に等しいことを証明せよ。

2. 次の数列の初めの n 項の和を求めよ。

(1) $9, 99, 999, \cdots$

(2) $0.9, 0.99, 0.999, \cdots$

3. 1 を 2 倍して 3 を加え, その結果を 2 倍して 3 を加え, さらにその結果を 2 倍して 3 を加える。このような計算を全部で n 回行なうとき, 最後の結果を求めよ。

4. $S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ。

4 記号 $\sum$ の用法

幾つかの数の和を表すために、記号 Σ が使用される。 Σ とはギリシャ語で「加え合わせる」という意味である。sigma(シグマ) と読む。

例えば、 $\sum_{k=1}^5 k^2$ と書けば、 k^2 において $k = 1, 2, 3, 4, 5$ とおいて得られる $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ の和を表す。

すなわち、 $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

同様に考えれば、

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$$

一般的に述べると、 $\sum_{k=1}^n x_k$ とおけば、 x_k において、 $k = 1, 2, \cdots, n$ とおいた和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ を表す。すなわち

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

【練習 1】次の記号を幾つかの数の和として表せ。

$$(1) \sum_{k=1}^n 2k \qquad (2) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$$

【練習 2】次の和を記号 Σ を用いて表せ。

$$(1) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \qquad (2) \overbrace{3 - 4 + 5 - 6 + \cdots}^{n \text{ 個}}$$

k が種々の値をとっても、それに無関係な定数 c があるとき、

$$\sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ 個}} = nc$$

(注意)

$$\sum_{k=3}^{10} c = 8c, \quad \sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c \text{ (何故か)}$$

(例 1) $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k$ を証明せよ。

(例 2) $\sum_{k=1}^n cx_k = c \sum_{k=1}^n x_k$ なることを証明せよ。

(例 3) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

これを用いて初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和を求める公式を導け。

【練習 1】100 と 300 の間にある整数のうち, 7 で割って 3 余るようなものの総和を求めよ。

【練習 2】第 k 項が $3 - 2k$ となる数列の初めの n 項の和を求めよ。

4.1 $\sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3$ (公式)

(例 1) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(例 2) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ を示せ。

< 練習問題 >

1 . 一般項 (第 n 項) $a_n = 2n^2 - n + 3$ のとき , このような数列の n 項の和を求めよ。

2 . 次の数列の初めの n 項の和を求めよ。

(1) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$

(2) $1, (1 + 2), (1 + 2 + 3), \dots$

(3) $12, 42, 72, \dots$

(4) $1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots$

3 . 次の数列の最初の n 項の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

4 . $k(k+1) = \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$ を利用して
 $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ (2 . の (1) の別法)

5 数学的帰納法

任意の自然数に対して，あることがらが成り立つことを証明する手段として 数学的帰納法というのがある。自然数に関する次の性質は、平凡ではあるが数学的帰納法の根拠である。

任意の2つの自然数 a, b に対して， $a < b$ のとき， a から初めて順次，1 つずつ大きい自然数に移りゆくことによって，必ず b に到達できる

例 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \cdots$ ① n は自然数

(証明)

(i) $n = 1$ のとき，左辺 = 1，右辺 = 1 ゆえに成り立つ。

(ii) $n = k$ ($k \geq 1$ なる整数) のとき成り立つと仮定する。

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1) \cdots ()$$

(iii) $n = k + 1$ のとき，

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) (\because ())$$

これは ① が $n = k + 1$ のときに成り立つことを示す。

(i) ~ (iii) から数学的帰納法により，① が成り立つ。(終)

問 1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を帰納法で示せ。

問 2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を帰納法で示せ。

<練習問題>

- 数学的帰納法にて証明せよ。 -

$$1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$2 \cdot (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \quad (\alpha > 0, n \geq 2) \cdots \cdots \text{(ベルヌイの不等式)}$$

$$3 \cdot x + \frac{1}{x} = t \text{ とおくとき, } x^n + \frac{1}{x^n} \text{ は, } t \text{ の } n \text{ 次式で表される。}$$

$$4 \cdot n \geq 2 \text{ のとき, } 2^n > 1 + n$$

6 階差数列

数列； $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots$ において

隣り合う2項の差を $d_1 = x_2 - x_1, d_2 = x_3 - x_2, \dots, d_n = x_{n+1} - x_n$ においてえられる数列 $\{d_n\}$ を 階差数列という。

$$\begin{array}{cccccccccccc} \{x_n\} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & \cdots & x_{n-1} & & x_n & & x_{n+1} \\ \{d_n\} & & d_1 & & d_2 & & & & & & d_{n-1} & & d_n \end{array}$$

これより， $x_2 = x_1 + d_1$

$$x_3 = x_2 + d_2 = x_1 + (d_1 + d_2)$$

$$x_4 = x_3 + d_3 = x_1 + (d_1 + d_2 + d_3)$$

$$\vdots x_n = x_1 + (d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1})$$

$$\therefore x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k$$

数列 $\{x_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とするとき，

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \quad (\text{公式})$$

【練習1】数列；1, 3, 6, 10, 15, 21, $\dots$ の一般項 (第 n 項) を求めよ。

【練習2】初項 a の数列の 階差数列は初項 b ，公比 r の等比数列である。元の数列の第 n 項を求めよ。