

**1** 曲線  $y = \left| x - \frac{1}{x} \right|$  ( $x > 0$ ) と直線  $y = 2$  で囲まれた領域の面積  $S$  求めよ.

**2**

行列  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  で定まる座標平面上の 1 次変換を  $f$  とする. ただし,  $a, b$  は実数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 原点  $O$  とは異なる点  $P(x, y)$  を  $f$  で移した点を  $Q$  とする. このとき, 長さの比  $\frac{OQ}{OP}$  は  $P$  によらないことを示し, その値を  $a, b$  を用いて表せ.

(2) 正の整数  $n$  に対して,  $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$  とするとき

$$p_n^2 + r_n^2 = (a^2 + b^2)^n, \quad q_n^2 + s_n^2 = (a^2 + b^2)^n$$

が成り立つことを示せ.

(3)  $109^2 = l^2 + m^2$  を満たす正の整数  $l, m$  を一組求めよ.

**3**

$xy$  平面上の 2 点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  に対して,  $d(P_1, P_2)$  を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する. いま, 点  $A(3, 0)$  と点  $B(-3, 0)$  に対して

$$d(Q, A) = 2d(Q, B)$$

を満たす点  $Q$  からなる関数を  $T$  とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $(a, b)$  が  $T$  上にあれば, 点  $(a, -b)$  も  $T$  上にあることを示せ.
- (2)  $T$  で囲まれる領域の面積を求めよ.
- (3) 点  $C$  の座標を  $(13, 8)$  とする. 点  $D$  が  $T$  上を動くとき,  $d(D, C)$  の最小値を求めよ.

**4**

$xy$  平面において, 点  $(1, 2)$  を通る傾き  $t$  の直線を  $l$  とする.  $l$  に垂直で原点  $O$  をと通る直線と  $l$  との交点を  $P$  とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $P$  の座標を  $t$  を用いて表せ.
- (2) 点  $P$  の軌跡が 2 次曲線  $2x^2 - ax = 0$  と 3 点のみ共有するような  $a$  の値を求めよ. また, そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ. ただし  $a \neq 0$  とする.

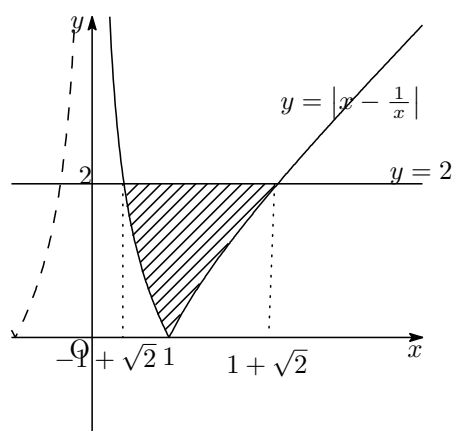
—解答例—

$y = \left| x - \frac{1}{x} \right|$  において,  $y = x - \frac{1}{x}$  から,  $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$

また,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$  などから  $y$  軸を漸近線として単調増加関数.

また,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$  であるから

$y = \left| x - \frac{1}{x} \right|$  ( $x > 0$ ) のグラフと直線  $y = 2$  をかくと



図の斜線部分の面積を求めて

$$\begin{aligned}
 \therefore S &= \int_{-1+\sqrt{2}}^1 \left\{ 2 - \left( -x + \frac{1}{x} \right) \right\} dx + \int_1^{1+\sqrt{2}} \left\{ 2 - \left( x - \frac{1}{x} \right) \right\} dx \\
 &= \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \log |x| \right]_{\sqrt{2}-1}^1 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} + \log |x| \right]_1^{\sqrt{2}+1} \\
 &= 2 + \frac{1}{2} - \left( 2(\sqrt{2}-1) + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} - \log(\sqrt{2}-1) \right) \\
 &\quad + 2(\sqrt{2}+1) - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2} + \log(\sqrt{2}+1) - \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 + 4 - 3 + \log 1 = 2 \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

—解答例—

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left( \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \text{とおける}$$

したがって  $f$  は原点の周りに  $\theta$  だけの回転と,  $\sqrt{a^2 + b^2}$  倍の合成である.

$$\therefore \frac{\text{OQ}}{\text{OP}} = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad A^n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$p_n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \cos n\theta, \quad q_n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \sin n\theta$$

$$r_n = -(\sqrt{a^2 + b^2})^n \sin n\theta, \quad s_n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \cos n\theta$$

であるから

$$p_n^2 + r_n^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^{2n} \cos^2 n\theta + (\sqrt{a^2 + b^2})^{2n} \sin^2 n\theta = (a^2 + b^2)^n$$

$$q_n^2 + s_n^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^{2n} \sin^2 n\theta + (\sqrt{a^2 + b^2})^{2n} \cos^2 n\theta = (a^2 + b^2)^n \dots (\text{終})$$

(3)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$

$$p_2 = a^2 - b^2, \quad r_2 = 2ab$$

 $109^2 = l^2 + m^2$  において,  $109 = 100 + 9 = 10^2 + 3^2$  となることから

$$a = 10, \quad b = 3 \quad \text{なる } a, b \text{ に対して, } l = 10^2 - 3^2 = 91, \quad m = 2 \cdot 10 \cdot 3 = 60$$

なる  $l, m$  が対応する.

$$\therefore (l, m) = (91, 60) \dots (\text{答})$$

—解答例—

(1)

$$d(Q, A) = 2d(Q, B) \text{ より}$$

$$|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|) \quad \text{より}$$

$$\therefore |y| = |x - 3| - 2|x + 3| \quad \text{である} \dots \textcircled{1}$$

$(a, b) \rightarrow (a, -b)$  において, ①は成り立つ.

よって  $(a, -b)$  も  $T$  上にある.  $\dots$  (終)

(2)

(1) により,  $T$  は  $x$  軸に対称な図形である

$y \geq 0$  のとき,  $y = |x - 3| - 2|x + 3|$  において

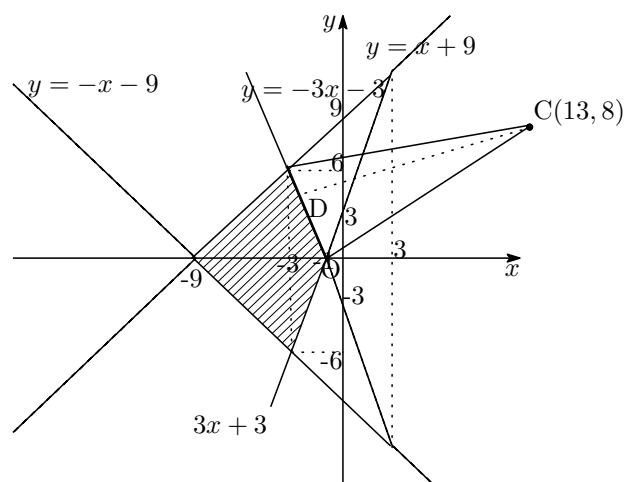
$$\begin{cases} \text{(i) } x \leq -3 \text{ のとき} & y = x + 9 \\ \text{(ii) } -3 < x \leq 3 \text{ のとき} & y = -3x - 3 \\ \text{(iii) } 3 < x \text{ のとき} & y = -x - 9 \end{cases}$$

などにより

求める図形は図の斜線部分である.

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \dots (\text{答})$$



(3)  $d(D, C) = l$  とおく.  $l$  を最小にする点  $D$  は線分  $y = -3x - 3$  ( $-3 \leq x \leq -1$ ) 上にある.

$$l = |13 - x| + |8 - (-3x - 3)| = |3x + 11| + |x - 13|$$

$$-3 \leq x \leq -1 \text{ より, } l = 3x + 11 - x + 13 = 2x + 24$$

$-3 \leq x \leq -1$  において,  $l$  は増加関数であることから,  $x = -3$  で最小となる.

最小値は  $2 \cdot (-3) + 24 = 18 \dots$  (答)

—解答例—

- (1)  $l$  の式は,  $y = t(x - 1) + 2$  であり,  $l$  に垂直で原点を通る直線の式は  $x + ty = 0$   
 この 2 つを連立させて,  $y = t(-ty - 1) + 2$  から,  $(t^2 + 1)y = -t + 2$  より,  $y = \frac{-(t - 2)}{t^2 + 1}$  ( $\because t^2 + 1 > 0$ )

このとき,  $x = -ty = \frac{t(t - 2)}{t^2 + 1}$  である. よって点 P の座標は

$$P\left(\frac{t(t - 2)}{t^2 + 1}, \frac{-(t - 2)}{t^2 + 1}\right) \cdots (\text{答})$$

- (2)  $x = \frac{t(t - 2)}{t^2 + 1}, y = \frac{-(t - 2)}{t^2 + 1}$  より  $t$  を消去して

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{t^2(t - 2)^2}{(t^2 + 1)^2} + \frac{(t - 2)^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(t^2 + 1)(t - 2)^2}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(t - 2)^2}{(t^2 + 1)} = \frac{t(t - 2) - 2(t - 2)}{(t^2 + 1)} = \frac{t(t - 2)}{t^2 + 1} + \frac{-2(t - 2)}{t^2 + 1} \\ &= x + 2y \quad \therefore x^2 + y^2 = x + 2y \iff \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \cdots \right\} \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで,  $2x^2 - ay = 0$  より,  $a \neq 0$  であるから,  $y = \frac{2x^2}{a}$  これを点 P の軌跡の式 (\*) に代入して,

$$x^2 + \frac{4x^4}{a^2} = x + \frac{4x^2}{a} \iff x \{4x^3 - a(4 - a)x - a^2\} = 0 \text{ したがって, 方程式 } 4x^3 - a(4 - a)x - a^2 = 0$$

が 0 以外の 2 つの異なる実数解をもてばよい.

$g(x) = 4x^3 - a(4 - a)x - a^2$  とおいて,

$$g'(x) = 12x^2 - a(4 - a)$$

ここで  $g(x)$  が極値をもつことが必要である.

$\therefore 0 < a < 4$  のとき

$$g'(x) = 0 \text{ より, } x = \pm \frac{\sqrt{a(4 - a)}}{2\sqrt{3}}$$

|         |            |           |            |          |            |
|---------|------------|-----------|------------|----------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-\alpha$ | $\cdots$   | $\alpha$ | $\cdots$   |
| $g'(x)$ | $+$        | $0$       | $-$        | $0$      | $+$        |
| $g(x)$  | $\nearrow$ | 極大        | $\searrow$ | 極小       | $\nearrow$ |

$$\left( \alpha = \frac{\sqrt{a(4 - a)}}{2\sqrt{3}} \right)$$

$g(0) = -a^2 < 0$  であるから条件を満たすのは,

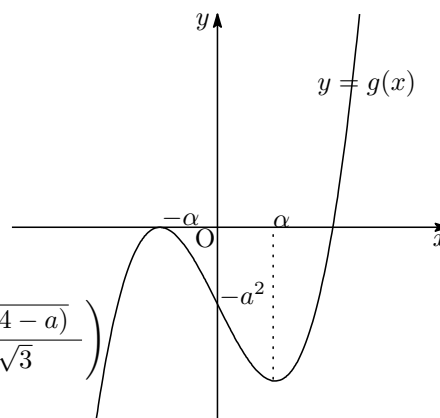
右図の場合

$$g\left(-\frac{\sqrt{a(4 - a)}}{2\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{a(4 - a)}}{2\sqrt{3}}\right)^3 + a(4 - a) \cdot \frac{\sqrt{a(4 - a)}}{2\sqrt{3}} - a^2 = 0$$

$\therefore 4 - a = 3a^2$  から,  $(3a + 1)(a - 1) = 0$  よって,  $0 < a < 4$  より,  $a = 1$  (適意)

このとき,  $x(4x^3 - 3x - 1) = x(x - 1)(2x + 1)^2 = 0$  から,  $x = -\frac{1}{2}, 0, 1$

共有点と  $a$  の値は  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0), (1, 2) \quad a = 1 \cdots (\text{答})$



1

O を原点とする座標平面における曲線  $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  上に点  $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  をとる.

- (1)  $C$  の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ.
- (2) 点 Q が  $C$  上を動くとき,  $\triangle OPQ$  の面積の最大値と, 最大値を与える Q の座標をすべて求めよ.

2

表の出る確率が  $p$ , 裏の出る確率が  $q$  である硬貨を用意する. ここで,  $p, q$  は正の定数で,  $p + q = 1$  を満たすとする. 座標平面における領域  $D$  を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし,  $D$  上を動く点 Q を考える. Q は点  $(0, 0)$  から出発し, 硬貨を投げて表が出れば  $x$  軸方向に +1 だけ進み, 裏が出れば  $y$  軸方向に +1 だけ進む. なお, この規則で  $D$  上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 硬貨を 4 回投げて Q が点  $(2, 2)$  に到達する確率  $P_4$  を求めよ.
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が  $(2, 2)$  に到達する確率  $P_5$  を求めよ.
- (3)  $P_5 = \frac{1}{9}$  のとき,  $p$  の値を求めよ.

**3**

$a$  を正の定数とし、座標平面上の 2 曲線  $C_1 : y = e^{x^2}$ ,  $C_2 : y = ax^2$  を考える. このとき以下の問いに答えよ. ただし必要ならば  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  であることを用いてもよい.

- (1)  $t > 0$  の範囲で、関数  $f(t) = \frac{e^t}{t}$  の最小値を求めよ.
- (2) 2 曲線  $C_1, C_2$  の共有点の個数を求めよ.
- (3)  $C_1, C_2$  の共有点の個数が 2 のとき、これらの 2 曲線で囲まれた領域を  $y$  軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ.

**4**

$f(x) = 4x(1-x)$  とする. このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x) \\ f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定まる多項式  $f_n(x)$  について以下の問いに答えよ.

- (1) 方程式  $f_2(x) = 0$  を解け.
- (2)  $0 \leq t < 1$  を満たす定数  $t$  に対し、方程式  $f(x) = t$  の解を  $\alpha(t), \beta(t)$  とする.  $c$  が  $0 \leq c < 1$  かつ  $f_n(c) = 0$  を満たすとき、 $\alpha(c), \beta(c)$  は  $f_{n+1}(x) = 0$  の解であることを示せ.
- (3)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲での方程式  $f_n(x) = 0$  の異なる解の個数を  $S_n$  とする. このとき  $S_{n+1}$  を  $S_n$  で表し、一般項  $S_n$  を求めよ.



—解答例—

1

(1)

接点を  $Q(x_0, y_0)$  とおくと接線の方程式は

$$\frac{x_0 x}{4} + y_0 y = 1 \cdots \textcircled{1} \text{ とおける.}$$

$$\textcircled{1} \text{ の法線ベクトル } \left( \frac{x_0}{4}, y_0 \right) \text{ は } \overrightarrow{OP} = \left( 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ に}$$

垂直であるから

$$\left( \frac{x_0}{4}, y_0 \right) \cdot (2, \sqrt{3}) = \frac{x_0}{2} + \sqrt{3}y_0 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

また,  $Q(x_0, y_0)$  は  $C$  上の点であるから

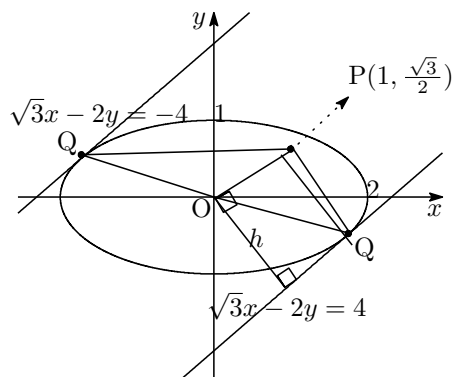
$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{12} = 1$$

$$\text{したがって, } x_0^2 = 3 \text{ より, } x_0 = \pm\sqrt{3} \text{ で, } y_0 = \mp\frac{1}{2} \text{ (複号同順)}$$

よって求める接線の方程式は,

$$\sqrt{3}x - 2y = \pm 4 \text{ (複号同順)} \cdots (\text{答})$$



- (2)  $\triangle OPQ$  の面積を  $OP$  を底辺とする三角形を考えて, 高さ  $h$  を最大とするのは, 点  $O$  から接線へ下ろした垂線の長さが最大であればよい.

$$\max h = \frac{|-4|}{\sqrt{3+4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \text{ より}$$

$$S = \frac{1}{2} \times OP \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{1 + \frac{3}{4}} \times \frac{4}{\sqrt{7}} \\ = 1 \cdots (\text{答})$$

$$\text{このとき, (1) より, 接点 } \left( \pm\sqrt{3}, \mp\frac{1}{2} \right) \text{ (複号同順)} \cdots (\text{答})$$

(別解) (1)  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + k$  とおいて,

$$\frac{x^2}{4} + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + k \right)^2 = 1 \quad \therefore x^2 + \sqrt{3}x + k^2 - 1 = 0$$

接する条件から, 判別式  $D = 3k^2 - 4(k^2 - 1) = 0 \quad \therefore k = \pm 2$ 

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \pm 2 \cdots (\text{答})$$

(2)  $Q(2\cos\theta, \sin\theta)$  とおくと

$$S = \frac{1}{2} \left| \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \right| = \left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \right| \text{ より}$$

$$S \text{ は, } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \iff \theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ のとき, 最大値 } 1 \text{ をとる. (以下略)}$$

—解答例—

2

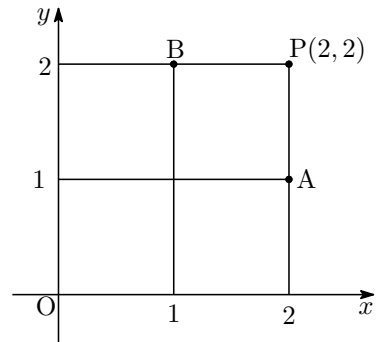
(1)

4 回の試行のうち, 2 回表, 2 回裏が出ればよい,  
その確率は

$${}_4C_2 p^2 q^2 = 6p^2 q^2 \cdots (\text{答})$$

(2) 図において, 4 回の試行の後 A, または B にいれば  
よいので

$$\begin{cases} \text{(i) A にいるとき} & {}_4C_3 p^3 q \times q = 4p^3 q^2 \\ \text{(ii) B にいるとき} & {}_4C_1 p q^3 \times p = 4p^2 q^3 \end{cases}$$



したがって, 求める確率は

$$\begin{aligned} 4p^3 q^2 + 4p^2 q^3 &= 4p^2 q^2 (p + q) \\ &= 4p^2 q^2 \cdots (\text{答}) \quad (\because p + q = 1) \end{aligned}$$

(3)

(2) から,  $4p^2 q^2 = \frac{1}{9}$  より,  $pq = \frac{1}{6}$   
 $p + q = 1$  であるから,  $p, q$  は方程式

$$t^2 - t + \frac{1}{6} = 0$$

の 2 解である. よって

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

これらはいずれも  $0 < p < 1$  を満たす.

$$\therefore p = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \cdots (\text{答})$$

—解答例—

3

(1)  $f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$  ( $t > 0$ ) であるから,  $t = 1$  のとき極小かつ最小.

|         |             |            |   |            |             |
|---------|-------------|------------|---|------------|-------------|
| $t$     | 0           | ...        | 1 | ...        |             |
| $f'(t)$ |             | -          | 0 | +          | +           |
| $f(t)$  | $(+\infty)$ | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | $(+\infty)$ |

$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$  であるから

最小値 :  $e$  ( $t = 1$ ) ... (答)

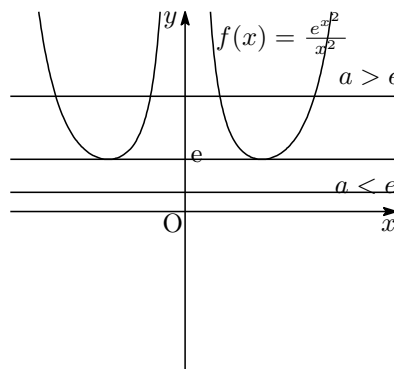
(2)  $x \neq 0$  であるから

$$e^{x^2} = ax^2 \iff a = \frac{e^{x^2}}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2} \cdots \textcircled{1} \\ y = a \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の共有点の個数を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2xe^{x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot e^{x^2}}{x^4} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)e^{x^2}}{x^3} \end{aligned}$$



増減表をかいて, 右図 (上) のグラフより,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = +\infty$  であるから  
求める共有点の個数は

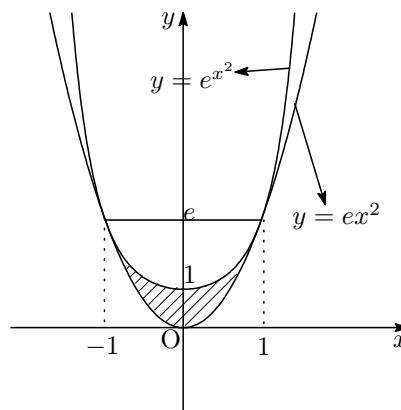
|         |          |            |     |            |            |     |            |            |          |
|---------|----------|------------|-----|------------|------------|-----|------------|------------|----------|
| $x$     |          | ...        | -1  | ...        | 0          | ... | 1          | ...        |          |
| $f'(x)$ |          | -          | 0   | +          | $\nearrow$ | -   | 0          | +          |          |
| $f(x)$  | $\infty$ | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\infty$ |

(答)  $\begin{cases} \text{(i)} & 0 < a < e \quad \text{のとき, } \dots 0 \text{ 個} \\ \text{(ii)} & a = e \quad \text{のとき, } \dots 2 \text{ 個} \\ \text{(iii)} & a > e \quad \text{のとき, } \dots 4 \text{ 個} \end{cases}$

(3)  $a = e$  のとき,  $y = e^{x^2}$  より,  $x^2 = \log y, \quad y = ex^2$  より,  $x^2 = \frac{y}{e}$

斜線部分の  $y$  軸まわりの回転体の体積を  $V$  とするとき,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^e \frac{y}{e} dy - \pi \int_1^e \log y dy \\ &= \pi \left[ \frac{y^2}{2e} \right]_0^e - \pi \left[ y \log y - y \right]_1^e \\ &= \frac{e\pi}{2} - \pi \{ (e \log e - e) - (\log 1 - 1) \} \\ &= \frac{(e-2)\pi}{2} \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

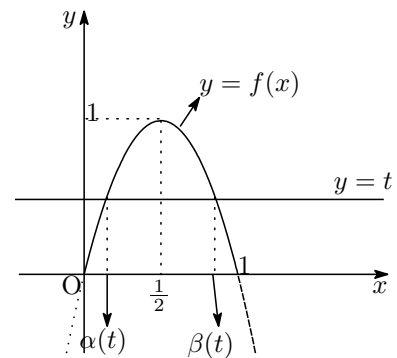


—解答例—

4

- (1)  $f_2(x) = 4f(x)(1 - f(x)) = 0$  より,  $f(x) = 0, 1$   
 $4x(1 - x) = 0$ ,  $4x(1 - x) = 1$  であるから,  $x = 0, 1, (2x - 1)^2 = 0$   
したがって,  $x = 0, 1, \frac{1}{2} \dots$  (答)

- (2)  $y = f(x)$  のグラフより  
 $f(x) = t$  において  
 $0 \leq \alpha(t) < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < \beta(t) \leq 1$  として一般性を失わない.  
 $n = 1$  のときは,  $x = 0, 1$  となり,  $f_2(x) = 0$  の解である. (1)  
 $f(x) = c$  ( $0 \leq c < 1$ ) なる,  $c$  に対して,  $x = \alpha(c)$ ,  $\beta(c)$  が対応しており,  $f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) = f_n(c) = 0$  であるから,  $\alpha(c)$ ,  $\beta(c)$  は,  $f_{n+1}(x) = 0$  の解である. (終)



- (3) (1), (2) より,  $f_1(0) = 0$ ,  $f_2(0) = f_1(f(0)) = 0$   
 $f_3(0) = f_2(0) = 0$  となるから, 以下同様の操作にて,  $f_{n+1}(0) = f_n(0) = 0 \dots$  ①  
また,  $f(1) = 0$  から,  $f_{n+1}(1) = f_n(f(1)) = f_n(0) = 0 \quad \therefore f_{n+1}(1) = 0 \dots$  ②

①, ② より,  $0 \leq t < 1$  にたいして,  $f(x) = t$  を満たす  $t$  の個数を考える.  
 $f_{n+1}(t) = 0$  なる  $t$  の値に対して,  $0 < t < \frac{1}{2}$  に 2 つ,  $\frac{1}{2} < t < 1$  に 2 つの  $t$  が対応する.  $t = 1$  の場合はただ一つであることから

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 2(S_n - 1) + 1 = 2S_n - 1 \quad \text{また, } S_1 = 2 \\ \therefore S_{n+1} - 1 &= 2(S_n - 1) \quad \text{と変形して} \\ S_n - 1 &= 2(S_{n-1} - 1) = 2^2(S_{n-2} - 1) = \dots = 2^{n-1}(S_1 - 1) \\ \therefore S_n - 1 &= 2^{n-1} \quad (\because S_1 = 2) \\ \therefore S_n &= 2^{n-1} + 1 \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

**1**

$t$  を実数とする. 行列  $A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$  について次の問いに答えよ.

- (1)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在することを示せ.
- (2)  $A + A^{-1}$ ,  $A - A^{-1}$ ,  $(A - A^{-1})^2$  を求めよ.
- (3)  $A^{2n} - tA^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が  $n$  によらない行列になるという. このときの  $t$  の値を求めよ.

**2**

$n$  を 3 以上の整数とする.  $3n$  枚のカードに 1 から  $3n$  までの数字が 1 つずつ書かれている. この中から 3 枚のカードを取り出す. ひとたび取り出したカードは戻さないものとする.

- (1) 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ.
- (2) 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ.
- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかわ調べよ.

**3**

$n$  を自然数とする. 曲線  $y = x^2(1-x)^n$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と  $x$  軸とで囲まれる図形の面積を  $S_n$  とする.

(1)  $S_n$  を求めよ.

(2)  $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  を求めよ.

**4**

$f(x) = e^{-x^2}$  とする. 曲線  $y = f(x)$  上の点  $A(a, f(a))$  における接線を  $\ell$ , 原点  $O$  を通り  $\ell$  に垂直な直線を  $\ell'$  とし,  $\ell$  と  $\ell'$  の交点を  $P$  とする.

(1) 線分  $OP$  の長さを求めよ.

(2)  $\ell$  と  $y$  軸との交点を  $Q$  とし,  $\angle POQ$  を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とする.  $\sin \theta$  を  $a$  を用いて表せ.

(3) (2) で求めた  $\sin \theta$  を最大にする  $a$  の値と, そのときの  $\sin \theta$  の値を求めよ.

—解答例—

**1**(1)  $\det A = t(2-t) - (1-t)(t-1) = 1 \neq 0$  よって  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在し,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \text{ (終)}$$

(2)

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E \text{ (答)} \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} A - A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix} \\ &= 2(t-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (答)} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - A^{-1})^2 &= 4(t-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 4(t-1)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \text{ (答)} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = X$  とおくと,  $\textcircled{3}$  から,  $X^n = O \ (n \geq 2)$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  より

$$A + A^{-1} = 2E$$

$$A - A^{-1} = 2(t-1)X$$

$$\therefore 2A = 2E + 2(t-1)X \quad \text{より} \quad A = E + (t-1)X$$

二項定理によって

$$\begin{aligned} A^n &= \left\{ E + (t-1)X \right\}^n = {}_nC_0 E^n + {}_nC_1 (t-1)E^{n-1}X + \overbrace{{}_nC_2 (t-1)^2 E^{n-2}X^2 + \cdots}^{=O} \\ &= E + n(t-1)X \end{aligned}$$

$$\therefore A^{2n} = \left\{ E + n(t-1)X \right\}^2 = E + 2n(t-1)X \quad (\because X^2 = O)$$

$$\begin{aligned} A^{2n} - tA^n &= E + 2n(t-1)X - t\left\{ E + n(t-1)X \right\} \\ &= (1-t)E + n(2-t)(t-1)X \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

(\*) が  $n$  に無関係な行列になるための条件は

$$(2-t)(t-1) = 0 \quad \text{であるから} \quad t = 1, 2 \text{ (答)}$$

—解答例—

**2** 3 で割った余りは 0, 1, 2 であることから剰余による集合をそれぞれ  $A_0, A_1, A_2$  とすると  $3n$  枚のカードにおいては,  $A_0, A_1, A_2$  の要素の個数はいずれも  $n$  で等しい.

(1) 3 枚のカードがいずれも  $A_0$  の要素である確率は

$$\frac{{}_n C_3}{{}_{3n} C_3} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \quad (\text{答})$$

(2) 3 枚のカードの数字  $x, y, z$  について数字の和が 3 の倍数となるのは

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & x, y, z \in A_0 \text{ の場合} \cdots \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \quad ((1) \text{ のとき}) \\ \text{(ii)} & x, y, z \in A_1, \text{ または, } x, y, z \in A_2 \text{ のときも同様} \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \\ \text{(iii)} & x \in A_0, y \in A_1, z \in A_2 \text{ のとき} \cdots \frac{n^3}{{}_{3n} C_3} = \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)} \end{array} \right.$$

(i)~(iii) は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \times 3 + \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{(3n-1)(3n-2)} \quad (\text{答})$$

(3) どちらも余事象をとって考える.

$$3 \text{ 枚のカードの積が } 3 \text{ の倍数でない確率は } \frac{{}_{2n} C_3}{{}_{3n} C_3} = \frac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

3 枚のカードの積が 3 の倍数である確率を  $p_1$ , 3 枚のカードの和が 3 でない確率を  $p_2$  とする.

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 1 - \frac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} - \left( 1 - \frac{3n^2 - 3n + 2}{(3n-1)(3n-2)} \right) \quad (\because (2)) \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{3(3n-1)(3n-2)} = \frac{(n+1)(n+2)}{3(3n-1)(3n-2)} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに  $p_1 > p_2$  であるから 積が 3 の倍数である確率の方が大きい... (答)



—解答例—

**3**

(1)

 $y = x^2(1-x)^n$  から,

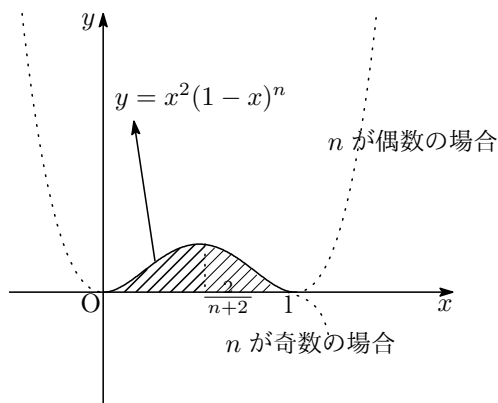
$$y' = 2x(1-x)^n + x^2(1-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$= x(1-x)^{n-1}\{2 - (2+n)x\}$$

$$y' = 0 \text{ において, } x = 0, \frac{2}{n+2}, 1$$

増減表を書いて, グラフを書いて

|      |   |            |                 |            |   |
|------|---|------------|-----------------|------------|---|
| $x$  | 0 | ...        | $\frac{2}{n+2}$ | ...        | 1 |
| $y'$ |   | +          | 0               | -          |   |
| $y$  | 0 | $\nearrow$ | 最大              | $\searrow$ | 0 |

 $0 \leq x \leq 1$  で  $y \geq 0$  であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 x^2(1-x)^n dx \\ &= \left[ -x^2 \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 x(1-x)^{n+1} dx \\ \int_0^1 x(1-x)^{n+1} dx &= \left[ -x \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 + \frac{1}{n+2} \int_0^1 (1-x)^{n+2} dx \\ &= \frac{1}{n+2} \left[ -\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \therefore S_n &= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

$$S_k = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left( \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \frac{1}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

—解答例—

4

 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$  あるから,  $\ell$  の方程式は

$$y - e^{-a^2} = -2ae^{-a^2}(x - a)$$

$$\therefore \ell : y = -2ae^{-a^2}x + (2a^2 + 1)e^{-a^2}$$

 $\ell'$  の方程式は

$$y = \frac{e^{a^2}}{2a}x \text{ であるから}$$

$$\frac{e^{a^2}}{2a}x = -2ae^{-a^2}x + (2a^2 + 1)e^{-a^2} \text{ において}$$

$$(e^{a^2} + 4a^2)x = 2a^2 + 1 \text{ より}$$

$$x = \frac{2a(2a^2 + 1)}{e^{2a^2} + 4a^2}, y = \frac{e^{a^2}(2a^2 + 1)}{e^{2a^2} + 4a^2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2a^2 + 1}{e^{2a^2} + 4a^2} (2a, e^{a^2}) \text{ であるから}$$

$$|OP| = \frac{2a^2 + 1}{e^{2a^2} + 4a^2} \left| \sqrt{4a^2 + e^{2a^2}} \right| = \frac{2a^2 + 1}{\sqrt{4a^2 + e^{2a^2}}} \text{ (答)}$$

$$(2) \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{e^{a^2}} (0, 2a^2 + 1) \text{ より, } OQ = \frac{2a^2 + 1}{e^{a^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{\frac{2a^2 + 1}{\sqrt{e^{2a^2} + 4a^2}}}{\frac{2a^2 + 1}{e^{a^2}}} = \frac{e^{a^2}}{\sqrt{e^{a^2} + 4a^2}} \text{ であるから}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left( \frac{e^{a^2}}{\sqrt{e^{a^2} + 4a^2}} \right)^2} = \frac{2|a|}{\sqrt{e^{2a^2} + 4a^2}} \text{ (答)}$$

$$(3) \sin^2 \theta = \frac{4a^2}{e^{2a^2} + 4a^2} = g(a) \text{ において}$$

$$g'(a) = 4 \times \frac{2a(e^{2a^2} + 4a^2) - a^2(4ae^{2a^2} + 8a)}{(e^{2a^2} + 4a^2)^2} = \frac{8a(1 - 2a^2)e^{2a^2}}{(4a^2 + e^{2a^2})^2}$$

$$g'(a) = 0 \text{ において, } a = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より, 増減表をかいて}$$

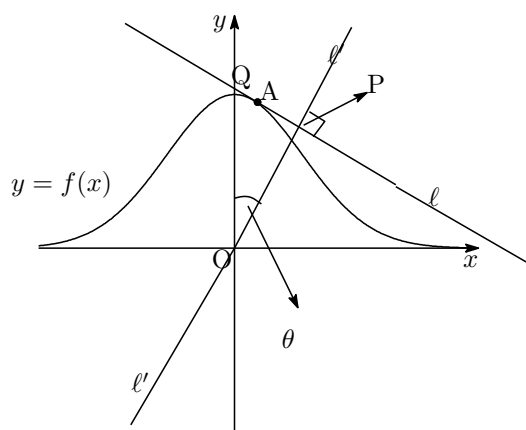
|         |            |                       |            |   |            |                      |            |
|---------|------------|-----------------------|------------|---|------------|----------------------|------------|
| $a$     | $\cdots$   | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   | 0 | $\cdots$   | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   |
| $g'(a)$ | +          | 0                     | -          | 0 | +          | 0                    | -          |
| $g(a)$  | $\nearrow$ | 極大                    | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 極大                   | $\searrow$ |

$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき,  $\sin^2 \theta = \frac{2}{e+2}$  で最大であり,  $0 \leq \theta \leq \pi$  より  $\sin \theta$  も最大である.

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき, } \sin \theta \text{ の最大値 } \sqrt{\frac{2}{e+2}} \text{ (答)}$$

【註】(3) では  $2a^2 = t$  ( $\geq 0$ ) において

$$\sin^2 \theta = h(t) = \frac{2t}{e^t + 2t} \text{ から, } h'(t) = \frac{2\{e^t + 2t - t(2^t + 2)\}}{(e^t + 2t)^2} = \frac{2e^t(1-t)}{(e^t + 2t)^2} \text{ とするほうが better!}$$



**1**

男性  $M_1, \dots, M_4$  の 4 人と女性  $F_1, \dots, F_4$  の 4 人が、横一列に並んだ座席  $S_1, \dots, S_8$  に座る場合を考える。

- (1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。
- (2) (1) の座り方の中で、 $M_1$  の両隣が  $F_1$  と  $F_2$  となる座り方は何通りあるか。
- (3) (1) の座り方の中で、 $M_1$  と  $F_1$  が隣り合わない座り方は何通りあるか。

**2**

次の条件で定められる数列  $\{a_n\}$  を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) すべての自然数  $n$  に対して

$$X \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成り立つように行列  $X$  を定めよ。

- (2) 自然数  $n$  に対して  $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$  の値を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

3

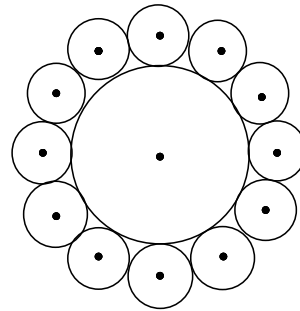
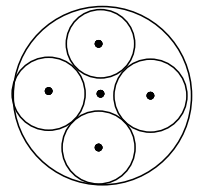
原点を中心とする半径 1 の円を  $C_1$  とし, 原点を中心とする  $\frac{1}{2}$  の円を  $C_2$  とする.  $C_1$  上に点  $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$  があり, また  $C_2$  上に点  $P_2\left(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta\right)$  がある. ただし,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  であるとする. 線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とし, 点  $Q$  の原点からの距離を  $r(\theta)$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 点  $Q$  の  $x$  座標のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 点  $Q$  が  $y$  軸上にあるときの  $\theta$  の値を  $\alpha$  とする. このとき,  $\alpha$  および定積分  $\int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta$  を求めよ.

4

平面上に半径 1 の円  $C$  がある. この円に外接し, さらに隣り合う 2 つの円が互いに外接するように, 同じ大きさの  $n$  この円を (例 1) のように配置し, その一つの円の半径を  $R_n$  とする. また, 円  $C$  に内接し, 同じ大きさの  $n$  この円を (例 2) のように配置し, その一つの円の半径を  $r_n$  とする. ただし,  $n \geq 3$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

例 1  $n = 12$  の場合例 2  $n = 4$  の場合

(1)  $R_6, r_6$  を求めよ.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(R_n - r_n)$  を求めよ. ただし,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  を用いてよい.

—解答例—

**1**

(1) 次のような 2 通りの場合が考えられる.

 ... (男性)       ... (女性) とする
(i) (ii) (i),(ii) のとき, それぞれ,  $4! \times 4! = 576$  通りあるから  $2 \times 576 = \mathbf{1152}$  通り (答)

(2)

(i) の場合,  $M_1$  が左から 3 番目, 5 番目, 7 番目の場合があり,いずれの場合も,  $F_1, F_2$  の座り方がそれぞれ 2 通りあり, 残りの女性の座り方が 2 通り, 残りの男性の座り方が 3! 通りある.したがって,  $3 \times 2 \times 2 \times 3! = 72$  通り

(ii) の場合も同様に, 72 通りある. よって題意の座り方は

$$72 \times 2 = \mathbf{144} \text{ 通り (答)}$$

(3)

(i) の場合,  $M_1$  が左端のとき,  $F_1$  はその右側の席を除く 3 通りの座り方があり, 残りの女性の座り方も  $3! = 6$  通り, またそれぞれに対して残りの男性の座り方が  $3! = 6$  通りある, よって,  $6 \times 6 \times 3 = 108$  通り  
 $M_1$  が 3 番目, 5 番目, 7 番目のとき,  $F_1$  はその両隣を除く 2 通りの座り方があり, 残り 3 人に女性の座り方と男性の座り方を考えて

$$3 \times 2 \times 3! \times 3! = 216 \text{ 通り}$$

(ii) の場合も (i) の場合の対称性を考えて, 同数の座り方がある. よって, 求める場合の数は

$$(108 + 216) \times 2 = \mathbf{648} \text{ 通り (答)}$$

**註** $M_1, F_1$  の 2 人が隣り合う場合を考えて, 全体から引いてもよい.

—解答例—

**2**(1)  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 7$  は条件を満たすから

$$X \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \text{とにおいて, } X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } X = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$$

逆に  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき,  $a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$  を考えて

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix} \cdots \textcircled{2}$$

② はすべての自然数について成り立つ. よって, 求める  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (答)

(2)  $d_n = a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$  とおく.

一般に,  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  が成り立つ. ② より

$$(-1)d_n = d_{n+1}, \quad d_1 = a_1 a_3 - (a_2)^2 = 4 - 9 = -5$$

また,  $d_2 = a_2 a_4 - (a_3)^2 = 5$  となるので,  $d_n = 5(-1)^n$  と推測できる.

以下これを数学的帰納法によって証明する.

1°  $n = 1$  のときは  $d_1 = -5$  で成立.

2°  $n = k$  ( $k \geq 1$  なる整数) のとき

$$d_k = 5(-1)^k \cdots \cdots (*)$$

が成り立つと仮定すると

$$d_{k+1} = -1 \cdot d_k = -1 \cdot 5(-1)^k = 5(-1)^{k+1} \quad (\because (*))$$

これより,  $n = k + 1$  のときも成立する.

以上より,  $d_n = a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2 = 5(-1)^n$  (答)

—解答例—

3

- (1) 2 点  $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $P_2\left(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta\right)$  において

線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q(x, y)$  とおく.

$$x = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta \cdots \textcircled{2}$$

3 倍角の公式より①は

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos \theta + \cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta \\ &= \cos^3 \theta - \frac{1}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

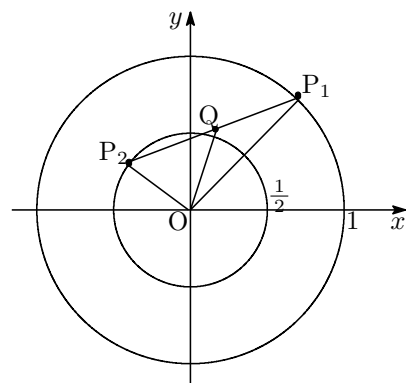
$t = \cos \theta$  とおくと,

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ から, } 0 < t \leq 1 \cdots \textcircled{3}$$

また,  $x = t^3 - \frac{1}{4}t$  であるから,

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - \frac{1}{4} = 3 \left( t + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \left( t - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

増減表をかいて (右図) 求める  $x$  の範囲は



|                 |   |            |                        |            |               |
|-----------------|---|------------|------------------------|------------|---------------|
| $t$             | 0 | $\cdots$   | $\frac{\sqrt{3}}{6}$   | $\cdots$   | 1             |
| $\frac{dx}{dt}$ |   | $-$        | 0                      | $+$        |               |
| $x$             | 0 | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{36}$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{4}$ |

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ (答)}$$

- (3)  $x = 0$  において,  $0 < t \leq 1$  から,  $t = \frac{1}{2}$  すなわち,  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  より,  $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$   $\left( 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\begin{aligned} r(\theta) = OQ^2 &= \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} (\cos 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin \theta) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cos 2\theta \quad \text{であるから} \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{r(\theta)\}^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \left[ \frac{5}{16} \theta + \frac{1}{8} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5}{48} \pi + \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ (答)} \end{aligned}$$

—解答例—

4

(1)

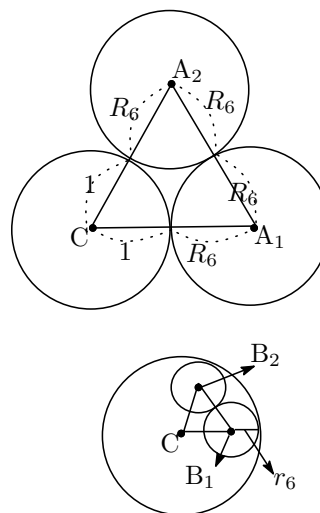
$\angle A_1CA_2 = \frac{\pi}{3}$  であるから

$CA_1 = CA_2 = 1 + R_6$ ,  $A_1A_2 = 2R_6$

ゆえに  $2R_6 + 1 + R_6$  より,  $R_6 = 1$  (答)

また, 下図において,  $\triangle CB_1B_2$  は正三角形.

$\therefore 1 - r_6 = 2r_6$  より,  $r_6 = \frac{1}{3}$  (答)



(2) (1) をモデルとして同様に考えると

$$R_n = (1 + R_n) \sin \frac{\pi}{n}, \quad R_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$r_n = (1 - r_n) \sin \frac{\pi}{n}, \quad r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} R_n - r_n &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{n} \quad \text{とおくと, } n \rightarrow \infty \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{\theta^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\pi^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= 2\pi^2 \text{ (答)} \end{aligned}$$



1

1 から 6 までの目があるさいころがある. さいころを振って出た目が  $k$  のとき, 単位円周上の点  $P$  が原点を中心として正の向きに角  $\frac{\pi}{k}$  だけ回転する. 点  $P$  の最初の位置を  $P_0$  として, 次の問いに答えよ.

- (1) さいころを何回か振って, 点  $P$  の回転した角の合計が  $\frac{\pi}{2}$  となる目の出方を列挙せよ.
- (2) さいころを  $n$  回振って移動した後の位置を  $P_n$  とする.  $P_4 = P_0$  となる目の出方は何通りあるか.
- (3) さいころを 2 回振ったところ, 1 回目は 4 の目, 2 回目は 3 の目が出た. そのとき, 三角形  $P_1P_2P_3$  の面積を最大とするような, 3 回目の目は何か. 理由を付けて答えよ.

2

$2 \times 2$  行列  $A$  と  $B$  が, 条件

$$A \neq O, \quad B \neq O, \quad AB = BA = O$$

を満たしているとする. ただし,  $O$  は零行列を表す. このとき以下の問い (1), (2) に答えよ. もし必要であれば, 行列  $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して

$$X^2 = (p+q)X - (ps - qr)E \cdots \cdots (*)$$

が成り立つことを使ってもよい. ただし,  $E$  は単位行列を表す.

- (1) ある数  $\alpha, \beta$  に対して  $A^2 = \alpha A, \quad B^2 = \beta B$  となることを示せ.
- (2) (1) において  $\alpha + \beta = 1$  のとき,  $A + B = E$  を示せ.

**3**

$x$  を実数とし、次の無限級数を考える.

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2-x^4} + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}} + \cdots$$

- (1) この無限級数が収束するような  $x$  の範囲を求めよ.  
 (2) この無限級数が収束するとき、その和として得られる  $x$  の関数を  $f(x)$  とかく. また

$$h(x) = f(\sqrt{|x|}) - |x|$$

とおく. このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  を求めよ.

- (3) (2) で求めた極限値を  $a$  とするとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - a}{x}$  は存在するか. 理由を付けて答えよ.

**4**

座標平面上に

$$f(x) = 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

で与えられる曲線  $C: y = f(x)$  と、直線  $\ell: y = ax$  ( $a$  は定数) を考える. このとき、次の問いに答えよ.

- (1)  $C$  と  $\ell$  がちょうど 2 個の共有点をもつための  $a$  の条件を求めよ. もし必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  を使ってもよい.  
 (2)  $C$  と  $\ell$  が第 1 象限で接するとき、 $C$  と  $\ell$ 、および  $x$  軸で囲まれた領域の面積を求めよ.

—解答例—

**1** さいころの目の出方と回転角の関係は

(1)

| 目   | 1     | 2               | 3               | 4               | 5               | 6               |
|-----|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 回転角 | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

(答)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) 1 回の試行のとき,} \quad \dots (2) \\ \text{(II) 2 回の試行のとき,} \quad \dots (3, 6), (6, 3), (4, 4) \\ \text{(III) 3 回の試行のとき,} \quad \dots (6, 6, 6) \quad \mathbf{5 \text{ 通り}} \end{array} \right.$

(2) さいころを 4 回振って  $2\pi, 4\pi$  回転する場合を調べると

出る目を  $x, y, z, w$  ( $x \leq y \leq z \leq w$ ) とおくと

(i)  $\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{y} + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi}{w} = 2\pi$  のとき

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 2$  であり,  $\frac{4}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq \frac{4}{w}$  より

$x \leq 2, w \geq 2$  となる.  $x = 1$  のとき,  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 1$  (\*) であるから

$\frac{3}{y} \geq 1$  よって,  $y = 1, 2, 3$   $y = 1$  のときは (\*) を満たさず, 不適.

$y = 2$  のときは,  $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{2}$  であり,  $(z-2)(w-2) = 4$  となり,  $(z, w) = (4, 4), (3, 6)$  また,

$y = 3$  のときは,  $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{2}{3}$  より,  $(2z-3)(2w-3) = 9$

このとき,  $(2z-3, 2w-3) = (3, 3), (1, 9) \iff (z, w) = (3, 3)$  (適),  $(2, 6)$  (不適)

$x = 2$  のとき,  $\frac{3}{y} \geq \frac{3}{2}$  から,  $y \leq 2 \therefore y = 2$

このとき,  $\frac{2}{z} \geq 1$  から,  $z = 2$  であり,  $w = 2$

以上より,  $(x, y, z, w) = (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 4), (1, 3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)$

また, (i)  $\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{y} + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi}{w} = 4\pi$  のとき

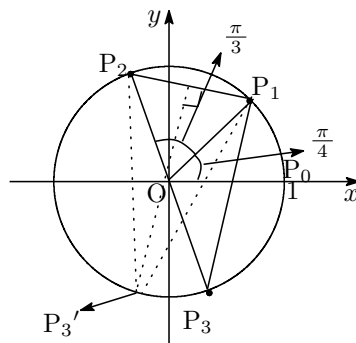
$(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$  の 1 通りしかない.

ここで,  $x, y, z, w$  の大小をキャンセルして目の出方の総数は

$$4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + 1 + 1 = \mathbf{42 \text{ 通り (答)}}$$

(3)

図のように  $P_0(1, 0)$  をとると,  $\frac{\pi}{4}$  回転したものを  $\frac{\pi}{3}$  回転して  $P_1, P_2$  をとることができる. 線分  $P_1P_2$  の距離はの長さは一定であるから. 高さを最大にするように点  $P_3$  をとればよい.  $\angle P_2OP'_3 = \frac{5}{6}\pi$  が最大であるが, 表にはその回転角はない. よって, それに最も近い  $\pi$  の回転を考えれば,  $\triangle P_1P_2P_3$  の面積は最大となる. よって 3 回目のさいころの目は **1** (答)



—解答例—

**2**

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ とおくと } (*) \text{ より}$$

$$\begin{cases} A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E & \cdots \cdots ① \\ B^2 = (p+s)B - (ps-qr)E & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

ここで、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在するとすれば、 $AB = BA = O$  の左右から  $A^{-1}$  をかけると  $B = O$  となり、 $B \neq O$  に矛盾する。よって、 $A$  は逆行列をもたない。また、同様にして  $B$  も逆行列をもたない。

①, ② より

$$ad - bc = ps - qr = 0 \quad \cdots ③ \text{ となり } \quad A^2 = \alpha A, \quad B^2 = \beta B \quad (\alpha = a + d, \beta = p + s)$$

の形で表すことができる。(終)

(2)  $\alpha = \beta = 1$  のとき  $X = A + B$  とおく。

$$\begin{aligned} X^2 &= (A + B)^2 = (A + B)(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A^2 + B^2 \quad (\because AB = BA = O) \end{aligned}$$

$$A^2 = A, \quad B^2 = B \quad \text{であるから}$$

$$X^2 = A + B = X \quad \text{よって } X(X - E) = O \cdots ④ \text{ と変形できる}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = O$$

$$\therefore ap + br = aq + bs = cp + dr = cq + ds = 0 \cdots ⑤$$

$$X = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \det X &= (a + p)(d + s) - (b + q)(c + r) = (ad - bc) + (ps - qr) + as + pd - br - cq \\ &= as + pd + ds + ap = (a + d)(p + s) = 1 \neq 0 \quad (\because ③, ⑤) \end{aligned}$$

よって、 $X$  は逆行列  $X^{-1}$  をもつから、④ の左から  $X^{-1}$  を掛けて

$$X^{-1}X(X - E) = X^{-1}O \quad \therefore X - E = O \text{ より, } X = A + B = E \text{ (終)}$$

—解答例—

**3**

(1) 初項  $x^2$ , 公比  $\frac{1}{1+x^2-x^4}$  である無限等比級数の収束条件は

(i)  $x = 0$  のとき, 収束し和は 0

(ii)  $x \neq 0$  のとき,

$$\left| \frac{1}{1+x^2-x^4} \right| < 1 \text{ から, } |x^4 - x^2 - 1| > 1 \quad \therefore x^4 - x^2 - 1 < -1, x^4 - x^2 - 1 > 1$$

$x^2(x+1)(x-1) < 0$  から,  $-1 < x < 1$  ( $x \neq 0$ )

また,  $x^4 - x^2 - 2 = (x^2 + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0$  から,  $x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x$

以上より, 求める  $x$  の値の範囲は

$$x < -\sqrt{2}, \quad -1 < x < 1, \quad \sqrt{2} < x \text{ (答)}$$

(2)  $f(x)$  は  $x \neq 0$  のとき

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2-x^4}} = \frac{x^2(1+x^2-x^4)}{x^2-x^4} = \frac{x^4-x^2-1}{x^2-1}$$

ここで,  $h(x) = f(\sqrt{|x|}) - |x|$

$$= \frac{x^2 - |x| - 1}{|x| - 1} - |x| = \frac{(x^2 - |x| - 1) - (x^2 - |x|)}{|x| - 1} = \frac{1}{1 - |x|}$$

よって,  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$  (答)

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - |x|} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(1 - |x|)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{h(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x(1 - x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{h(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x(1 + x)} = -1$$

よって,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - a}{x}$  は存在しない. (答)

—解答例—

4

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x} \text{ において} \\ f'(x) &= 2e^{1-\frac{1}{2}x} + 2(x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x} \\ &= (3-x)e^{1-\frac{1}{2}x} \\ f''(x) &= -e^{1-\frac{1}{2}x} + (3-x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{2}(x-5)e^{1-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

|          |            |   |            |   |            |
|----------|------------|---|------------|---|------------|
| $x$      | $\cdots$   | 3 | $\cdots$   | 5 | $\cdots$   |
| $f'(x)$  | +          | 0 | -          |   | -          |
| $f''(x)$ | -          |   | -          | 0 | +          |
| $f(x)$   | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |   | $\searrow$ |

(2)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  より, グラフは右図のようになる.

点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$y - 2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t} = (3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(x-t)$$

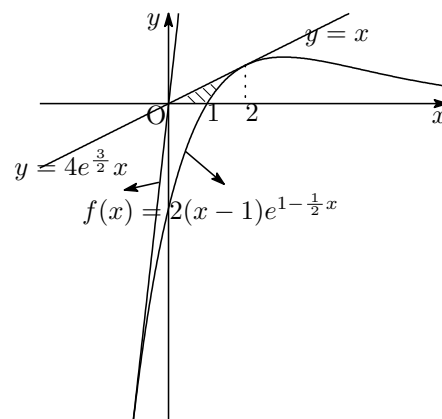
原点を通ることから,

$$-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t} = -t(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}$$

$t^2 - t - 2 = 0$  より,  $(t+1)(t-2) = 0$  であるから,  $t = -1, 2$

このとき,  $a = 4e^{\frac{3}{2}}, 1$  であるから,  $C$  と  $\ell$  が 2 個の共有点をもつ条件はグラフにより

$$0 < a < 1, \quad 4e^{\frac{3}{2}} < a \text{ (答)}$$



(2)  $a = 1$  のとき, 接点の座標は  $(2, 2)$  で, 求める図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2^2 - \int_1^2 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2 - 2 \left[ -2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x} \right]_1^2 - 4 \int_1^2 e^{1-\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2 + 4 - 4 \left[ -2e^{1-\frac{1}{2}x} \right]_1^2 \\ &= 6 + 8(1 - \sqrt{e}) = 14 - 8\sqrt{e} \text{ (答)} \end{aligned}$$

## 1

$n$  を 3 以上の整数とする. A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から  $n$  までの整数を 1 つずつ選ぶ. どの数を選ぶ確率も等しく  $\frac{1}{n}$  とする. A, B, C が選んだ数を順に  $a, b, c$  とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 3 人のうち, 少なくとも 1 人が  $n$  を選ぶ確率を求めよ.
- (2)  $a$  と  $b$  が等しくなる確率を求めよ.
- (3) 2 人が同じ数, 他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ.
- (4)  $a < b < c$  となる確率を求めよ.

## 2

次の各問いに答えよ.

- (1)  $p, q$  を 0 でない定数とする.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = p a_n + \frac{q-p}{2} q^{n-1}$$

で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

- (2)

$$b_n = (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列  $\{b_n\}$  に対して

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

とする. このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.

**3**

$a$  を 0 以上の実数,  $n$  を正の整数とすると, 次の問いに答えよ

(1)

$$\int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

が成り立つことを示せ.

$$(2) \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a \text{ が成り立つことを示せ.}$$

$$(3) e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \frac{a^2 e^a}{2n} \text{ が成り立つことを示せ.}$$

**4**

$xy$  平面の曲線

$$C : x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}, \quad y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

について, 次の問いに答えよ.

$$(1) \text{ 曲線 } C \text{ 上の } t = \theta \text{ に対応する点 } P \left( \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \text{ における } C \text{ の接線 } \ell \text{ の方程式を求めよ.}$$

$$(2) \alpha = \sin \theta + \cos \theta \text{ とおく. 点 } P \left( \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \text{ における } C \text{ の接線 } \ell \text{ と } x \text{ 軸, } y \text{ 軸で囲まれた}$$

三角形の面積  $S$  を  $\alpha$  の式で表せ.

$$(3) 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, (2) で求めた面積 } S \text{ の値の範囲を求めよ.}$$



—解答例—

**1**

- (1) 3 人とも  $n$  以外を選ぶ確率は  $\frac{(n-1)^3}{n^3}$  であるから、少なくとも 1 人が  $n$  を選ぶ確率は、余事象の関係から

$$1 - \frac{(n-1)^3}{n^3} = \frac{n^3 - (n-1)^3}{n^3} = \frac{3n^2 - 3n + 1}{n^3} \quad (\text{答})$$

- (2)  $a = b$  なる場合は  $n$  通りあり、それぞれに対して  $c$  は  $n$  通りある。よって、求める確率は

$$\frac{n \times n}{n^3} = \frac{1}{n} \quad (\text{答})$$

- (3) 3 人のうちのどの 2 人が同じ数  $\cdots {}_3C_2 \times n = 3n$  通り、他の 1 人が異なる数を選ぶ方法は  $(n-1)$  通りであるから、求める確率は

$$\frac{3n \times (n-1)}{n^3} = \frac{3(n-1)}{n^2} \quad (\text{答})$$

- (4)  $a < b < c$  となる場合の数は、 ${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$  通りであるから、求める確率は

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \quad (\text{答})$$

—解答例—

**2**(1)  $a_{n+1} = pa_n + \frac{1}{2}q^n - \frac{1}{2}pq^{n-1}$  を変形して

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}q^n = p \left( a_n - \frac{1}{2}q^{n-1} \right)$$

であるから,

$$a_n - \frac{1}{2}q^{n-1} = p^{n-1} \left( a_1 - \frac{1}{2}q^0 \right) = p^{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{2}q^{n-1} = \frac{1}{2}p^{n-1}$$

よって,

$$a_n = \frac{p^{n-1} + q^{n-1}}{2} \quad (\text{答})$$

(2)

(i)  $n = 2m$  のとき,

$$\begin{aligned} S_{2m} &= b_1 + b_3 + \cdots + b_{2m-1} + \{b_2 + b_4 + \cdots + b_{2m}\} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{2m+1}{2m-1} - \left\{ \log \frac{4}{2} + \log \frac{6}{4} + \cdots + \frac{2m+2}{2m} \right\} \\ &= (\log 3 - \log 1) + (\log 5 - \log 3) + \cdots + \log(2m+1) - \log(2m-1) \\ &\quad - \{(\log 4 - \log 2) + (\log 6 - \log 4) + \cdots + (\log(2m+2) - \log 2m)\} \\ &= \log 2 + \log(2m+1) - \log(2m+2) = \log 2 + \log \frac{2m+1}{2m+2} \end{aligned}$$

$$(ii) \ n = 2m+1 \text{ のとき, } S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1} = \log 2 + \log \frac{2m+1}{2m+2} + \log \frac{2m+3}{2m+1}$$

 $n \rightarrow \infty$  のとき,  $m \rightarrow \infty$  のとき,

$$\log \frac{2m+1}{2m+2} = \log \frac{2 + \frac{1}{m}}{2 + \frac{2}{m}} \rightarrow 0, \quad \text{また, } \log \frac{2m+3}{2m+1} \rightarrow 0$$

$$\therefore S_{2m} \rightarrow \log 2$$

また, 同様にして,

$$S_{2m+1} \rightarrow \log 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2 \quad (\text{答})$$

—解答例—

**3**

(1)

$$\begin{aligned}
\int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx &= \left[ - (e^{a-x}) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]_0^a + \int_0^a e^{a-x} n \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} dx \\
&= - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n + e^a + \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\
\therefore \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad (\text{終})
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} = \frac{a}{n} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \geq 0 \quad (\because a \geq 0, n \geq 1)$$

また, (1) より

$$\begin{aligned}
e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n dx - \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} dx \\
&= \int_0^a \frac{x}{n} e^{a-x} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} dx \geq 0 \quad \left(\because \frac{x}{n} \geq 0, e^{a-x} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \geq 0\right) \\
\therefore \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} &\leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a \quad (\text{終})
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \frac{x}{n} e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \quad \text{において} \\
0 \leq x \leq a \quad \text{のとき} \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} &\leq e^x \quad \text{であるから} \\
\int_0^a \frac{x}{n} e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx &\leq \int_0^a \frac{x}{n} e^{a-x} \cdot e^x dx \\
= \int_0^a \frac{1}{n} \cdot e^a \cdot x dx &= \frac{e^a}{n} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{e^a a^2}{2n} \quad \text{となり} \\
e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &\leq \frac{a^2 e^a}{2n} \quad \text{が成り立つ (終)}
\end{aligned}$$

—解答例—

4

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{-\sin t(1 - \sin t) - (-\cos t)\cos t}{(1 - \sin t)^2} \\
&= \frac{1 - \sin t}{(1 - \sin t)^2} = \frac{1}{1 - \sin t} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t(\sin t)}{(1 - \cos t)^2} \\
&= \frac{-(1 - \cos t)}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{1 - \cos t} \text{ より } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}
\end{aligned}$$

$t = \theta$  のとき,  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{t=\theta} = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta}$  であるから,  $\ell$  の方程式は

$$y - \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} \left( x - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) \quad \therefore y = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} x + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \text{ (答)}$$

(2)  $x$  軸,  $y$  軸との交点をそれぞれ, A, B とおくと,  $x = 0, y = 0$  において

$$A \left( \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta}, 0 \right), \quad B \left( 0, \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) \text{ となる.}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{\alpha^2}{2 - 2(\sin \theta + \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \alpha^2 - 1 \text{ であるから}$$

$$S = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \text{ (答)}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \text{ また, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ から, } \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \text{ したがって, } 1 < \alpha \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{2\alpha(\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1)\alpha^2}{(\alpha - 1)^4} = -\frac{2\alpha}{(\alpha - 1)^3} \text{ から, 増減表を書いて}$$

$$1 < \alpha \leq \sqrt{2} \text{ のとき,}$$

$$S \text{ は単調減少であり, } \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} S = \infty \text{ である.}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \text{ のとき, } S = \frac{2}{(\sqrt{2} - 1)^2} = 6 + 4\sqrt{2}$$

したがって, 求める  $S$  の値の範囲は

$$S \geq 6 + 4\sqrt{2} \text{ (答)}$$

|                      |   |            |            |
|----------------------|---|------------|------------|
| $\alpha$             | 1 | $\dots$    | $\sqrt{2}$ |
| $\frac{dS}{d\alpha}$ |   | -          |            |
| $S$                  |   | $\searrow$ |            |

**1**

A, B, C の 3 人のうち 2 人が、1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き、大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし、最初に A と B が対戦し、その後は、直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また、カードを引く順番は最初は A から、その後は直前の対戦の勝者からとする。なお、対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし、引いたカードは対戦後直ちに元の束に戻すものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。
- (2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。
- (3) 5 回の対戦を行うとき、A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

**2**

$f(x) = x^3 - 3a^2x - b$  とする。ただし、 $a, b$  は実数の定数であり、 $a \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式  $f(x) = 0$  のすべての解が区間  $-1 \leq x \leq 1$  に含まれる実数解であるための条件を、 $a, b$  に関する不等式で表せ。
- (2) 座標平面上で、(1) で求めた条件を満たす点  $(a, b)$  の集合が表す領域を  $D$  とする。 $D$  の概形を描き、その面積を求めよ。

**3**

方程式  $y = x^2$  で与えられる座標平面上の放物線を  $C$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とする。 $C$  上の点  $P$  をどのように選んでも、 $P$  を行列  $A$  で表される移動によって移した点がまた  $C$  上にあるとき、 $A$  の成分  $a, b, c, d$  がみたす条件を求めよ。

- (2) 2 点  $Q(-1, 1)$ ,  $Q'(1, -1)$  をとり、 $Q'$  を通り、線分  $QQ'$  と直交する直線を  $\ell$  とする。 $C$  上の点  $P$  を行列  $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$  で表される移動によって移した点を  $P'$  とするとき、 $P'$  から  $Q$  までの距離と  $P'$  から  $\ell$  までの距離が等しくなるような  $\alpha$  の値を求めよ。

**4**

関数  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) について、次の問いに答えよ。

- (1)  $x \geq \frac{3}{4\pi}$  ならば、 $f'(x) > 0$  であることを示せ。
- (2)  $b \geq a > 0$ ,  $b \geq \frac{2}{\pi}$  のとき、

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b) \leq b-a$$

が成り立つことを示せ。

—解答例—

**1**(1) すべての場合は、 $13 \times 12$  通りで、A が勝つのは  ${}_{13}C_2$  通り、よって求める確率は、

$$\frac{{}_{13}C_2}{13 \cdot 12} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(2) A が 4 回戦に出場するのは次の場合がある。

(○ … 勝, △ … 休み, × … 負) とする。

| ① | ② | ③ |                                                         |
|---|---|---|---------------------------------------------------------|
| ○ | ○ | ○ | $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$                         |
| ○ | × | △ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$ |
| × | △ | ○ | $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ |

求める確率は、 $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$  (答)

(3) A が最初に連勝 (2 連勝) する場合は次の通りである。() 内は勝者。

| ① | ②     | ③     | ④ | ⑤ |                                                                        |
|---|-------|-------|---|---|------------------------------------------------------------------------|
| ○ | ○     |       |   |   | $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$                                        |
| ○ | × (C) | △ (B) | ○ | ○ | $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{32}$                |
| × | △ (C) | ○     | ○ |   | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$ |

よって求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32} \quad (\text{答})$$

—解答例—

2

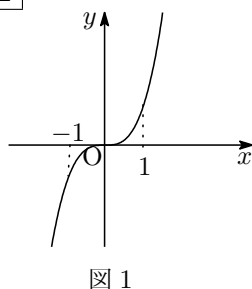


図 1

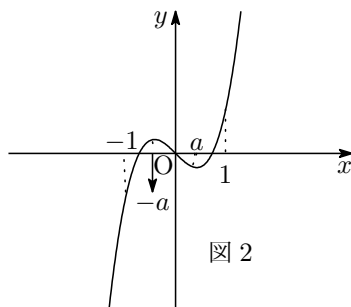


図 2

(1)  $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$  であるから,

(i)  $a = 0$  のとき,  $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \therefore f(x)$  は単調増加.(図 1)

解が  $-1 \leq x \leq 1$  を満たすための条件は,  $f(-1) \leq 0, f(1) \geq 0$

$$\therefore -1 + 3a^2 - b \leq 0, \quad 1 - 3a^2 - b \geq 0 \cdots \textcircled{1}$$

(ii)  $a > 0$  のとき,  $f'(x) = 3(x+a)(x-a)$  で

| $x$     |   | $-a$       |   | $a$         |   |
|---------|---|------------|---|-------------|---|
| $f'(x)$ | + | 0          | - | 0           | + |
| $f(x)$  | ↗ | $2a^3 - b$ | ↘ | $-2a^3 - b$ | ↗ |

条件より, 図 2 のようになることであり,

$$2a^3 - b \geq 0, \quad -2a^3 - b \leq 0, \quad f(-1) \leq 0, \quad f(1) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 0 < a \leq 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から, 求める条件は

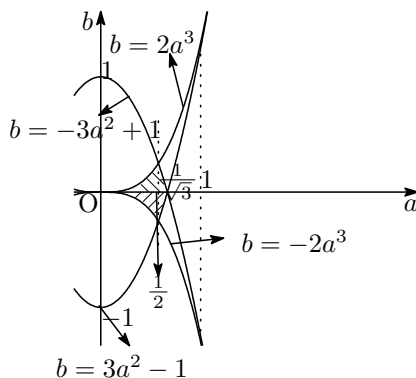
$$b \geq 3a^2 - 1, \quad b \leq -3a^2 + 1, \quad b \leq 2a^3, \quad b \geq -2a^3, \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (\text{答})$$

(2)

求める点  $(a, b)$  の範囲は図の斜線部分で境界を

含む. 図の対称性から, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 2a^3 da + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (-3a^2 + 1) da \\ &= \left[ a^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[ 2a - 2a^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{16} + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) - \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} - \frac{11}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$





—解答例—

**3**

(1)

点 P の座標を,  $(t, t^2)$  とおく。  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + bt^2 \\ ct + dt^2 \end{pmatrix}$

条件より, これが曲線  $C$  上の点であるから,

$$ct + dt^2 = (at + bt^2)^2 \iff ct + dt^2 = a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4$$

$t$  についての恒等式であるから

$$c = 0, \quad d = a^2, \quad 0 = 2ab, \quad 0 = b$$

よって求める条件は,  $b = c = 0, d = a^2$  (答)

(2)  $P(t, t^2)$  に対して,  $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \alpha t^2 \\ t + \alpha t^2 \end{pmatrix} \therefore P'(t - \alpha t^2, t + \alpha t^2)$

$\overrightarrow{QQ'} = (2, -2) = 2(1, -1)$  であるから,  $\ell$  の式は

$$(x - 1) - (y + 1) = 0 \quad \therefore \ell: x - y - 2 = 0$$

条件より

$$\sqrt{(t - \alpha t^2 + 1)^2 + (t + \alpha t^2 - 1)^2} = \frac{|(t - \alpha t^2) - (t + \alpha t^2) - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{2(t^2 + (\alpha t^2 - 1)^2)} = \sqrt{2}|\alpha t^2 + 1|$$

$$t^2 + \alpha^2 t^4 - 2\alpha t^2 + 1 = \alpha^2 t^4 + 2\alpha t^2 + 1$$

$$\therefore t^2(1 - 4\alpha) = 0 \iff t = 0, \alpha = \frac{1}{4}$$

したがって, 求める  $\alpha$  の値は

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{(i)} & t = 0 \text{ のとき, } \alpha \text{ は任意} \\ \text{(ii)} & \alpha = \frac{1}{4} \end{cases}$$

—解答例—

4

証明

$$(1) f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = t \left( 0 < t \leq \frac{4}{3}\pi \right) \text{ とおく. } f'(x) = \sin t - t \cos t = g(t) \text{ とおいて,}$$

$$g'(t) = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

増減表を考えて

|         |   |            |       |            |                                        |
|---------|---|------------|-------|------------|----------------------------------------|
| $t$     | 0 |            | $\pi$ |            | $\frac{4}{3}\pi$                       |
| $g'(t)$ |   | +          | 0     | -          |                                        |
| $g(t)$  |   | $\nearrow$ | $\pi$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$ |

ここで,  $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi > 0$  であるから,

$$0 < t \leq \frac{4}{3}\pi \text{ のとき, } g(t) > 0 \quad \therefore f'(x) > 0 \left( x \geq \frac{4}{3\pi} \right) \text{ (終)}$$

(2)  $a < b$  のとき,  $h(b) = \int_a^b f(x)dx$  とおく, 閉区間  $[a, b]$  で連続, 开区間  $(a, b)$  で微分可能であるから, 平均値の定理から

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)h'(c) = (b-a)f(c)$$

となる  $c$  ( $a < c < b$ ) が存在する.

(1)  $b \geq \frac{2}{\pi} > \frac{4}{3\pi}$  であるから, (1) より,  $f(x)$  は単調増加.

$$\therefore f(a) \leq f(c) \leq f(b) \text{ より, } \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(b)$$

$$b-a - (b-a)f(b) = (b-a)\{1-f(b)\} \text{ において, } 1-f(b) = 1-b\sin \frac{1}{b} \cdots (*)$$

$$\frac{1}{b} = u \text{ とおくと, } b \geq \frac{2}{\pi} \text{ より, } 0 < u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(*) \text{ は, } 1 - \frac{1}{u} \sin u = \frac{u - \sin u}{u}$$

$$I(u) = u - \sin u \text{ において, } I'(u) = 1 - \cos u > 0 \quad \therefore I(u) \text{ は単調増加.}$$

$$I(u) > I(0) = 0 \text{ より, } (b-a)f(b) \leq b-a$$

$a = b$  のときは, すべての辺が 0 となり, 明らかに成立.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(b) \leq b-a \text{ (終)}$$

**1**

座標平面上において、曲線  $C$  上に置ける接線に垂直で  $P$  を通る直線を、 $P$  における  $C$  の法線<sup>ほうせん</sup>とよぶ。双曲線  $C_1 : y = \frac{1}{x}$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$  における  $C_1$  の法線の方程式を求めよ。ただし、 $p \neq 0$  とする。
- (2) 点  $Q(q, -q)$  を中心とする円  $C_2$  と  $C_1$  が、ちょうど 2 個の共有点をもつとき、円  $C_2$  の半径  $r$  を  $q$  の式で表せ。

**2**

次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。
- (2)  $a, b$  は  $b > a > 0$  を満たすとする。このとき、次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b > (b+1)^a$$

**3**

行列  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は, 次の関係式で定まるものとする.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 + (-1)^n \end{pmatrix} A_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $b_3$  の値を求めよ.
- (2)  $b_{2n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $n$  の式で表せ.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}$  の値を求めよ.

**4**

座標平面において, 原点  $O(0, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $C_1$  とし, 点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  と点  $Q(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$  における接線をそれぞれ  $\ell_1, \ell_2$  とする. ただし,  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  である.  $\ell_1$  と  $\ell_2$  の交点を  $R(\alpha, \beta)$  とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点  $R$  の座標  $\alpha, \beta$  を  $\theta$  の式で表せ.
- (2)  $\theta$  を  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  の範囲で動かして得られる点  $R$  の軌跡を  $C_2$  とする. このとき, 直線  $y = \sqrt{3}x$  と曲線  $C_2$  と  $y$  軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

—解答例—

**1**

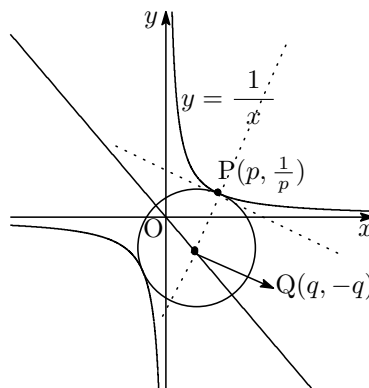
(1)

$y = \frac{1}{x}$  より,  $y' = -\frac{1}{x^2}$  であるから,

$x = p$  における接線の傾きは  $-\frac{1}{p^2}$  であり, 法線の傾きは  $p^2$

よって,  $C_1$  の法線の式は

$$y - \frac{1}{p} = p^2(x - p) \quad \therefore y = p^2x - p^3 + \frac{1}{p} \quad (\text{答})$$



(2)  $C_2, C_1$  が 2 個の共有点をもつのは, 円と双曲線が接するときであり  
点 P における法線が円の中心 Q を通ることから

$$-q = p^2q - p^3 + \frac{1}{p} \dots\dots\dots ①$$

また

$$r^2 = (p - q)^2 + \left(\frac{1}{p} + q\right)^2 \dots\dots\dots ②$$

$$① \text{ より, } q(p^2 + 1) = \frac{p^4 - 1}{p} \text{ より, } q = \frac{p^2 - 1}{p} = p - \frac{1}{p} \dots\dots ③$$

$$③ \text{ より, } r^2 = \left(p - \frac{p^2 - 1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{p} + \frac{p^2 - 1}{p}\right)^2 = \frac{p^4 + 1}{p^2} \dots\dots ④$$

$$③ \text{ から, } p^2 - qp - 1 = 0 \text{ より, } p = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4}}{2} \dots\dots ⑤$$

$$④ \text{ から, } r^2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } ⑤ \text{ から, } p + \frac{1}{p} &= \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4}}{2} + \frac{2}{q \pm \sqrt{q^2 + 4}} \\ &= \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4}}{2} - \frac{q \mp \sqrt{q^2 + 4}}{2} = \pm \sqrt{q^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\text{従って, } r^2 = q^2 + 4 - 2 = q^2 + 2 \quad r > 0 \text{ より, } r = \sqrt{q^2 + 2} \quad (\text{答})$$

$$\boxed{\text{註}} \quad r^2 = (p - q)^2 + \left(\frac{1}{p} + q\right)^2 \quad (\because ③)$$

$$= 2q^2 - 2q\left(p - \frac{1}{p}\right) + \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 2q^2 - 2q^2 + q^2 + 2$$

$$= q^2 + 2 \quad \therefore r = \sqrt{q^2 + 2}$$

—解答例—

**2**

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\frac{x}{x+1} - \log(x+1)}{x^2} \\
 &= \frac{x - (x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)} \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)  $x \neq 0$ , また真数条件から,  $x+1 > 0$  であるから

$$(\text{分母}) = x^2(x+1) > 0$$

である.  $g(x) = x - (x+1)\log(x+1)$  とおいて,  $g(x)$  の符号を調べる.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 1 - \log(x+1) - 1 \\
 &= -\log(x+1) \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

\textcircled{1} より,  $g'(x) = 0$  とおいて,  $x = 0$ . 増減表をかいて

|         |      |            |     |            |
|---------|------|------------|-----|------------|
| $x$     | $-1$ | $\dots$    | $0$ | $\dots$    |
| $g'(x)$ |      | $+$        | $0$ | $-$        |
| $g(x)$  |      | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  であるから,  $g(x) < 0$  ( $-1 < x < 0$ ,  $0 < x$  のとき) であり

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} < 0 & (-1 < x < 0) \\ < 0 & (x > 0) \end{cases}$$

よって,  $f(x)$  は  $x > 0$  において減少関数である.

したがって

$$b > a > 0 \quad \text{のとき} \quad f(b) < f(a) \iff \frac{\log(b+1)}{b} < \frac{\log(a+1)}{a}$$

$$\therefore a \log(b+1) < b \log(a+1) \iff \log(b+1)^a < \log(a+1)^b$$

底は 1 より大きいから

$$(a+1)^b > (b+1)^a \dots (\text{終})$$

—解答例—

**3**

$$(1) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 38 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \therefore b_3 = 38 \cdots (\text{答})$$

$$(2) A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A_{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ c_{2n-1} & d_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{cases} b_{2n+1} = b_{2n-1} + 12d_{2n-1} \cdots \textcircled{1} \\ d_{2n+1} = 3d_{2n-1} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② より,  $\{d_{2n-1}\}$  は, 初項  $d_1 = 3$ , 公比 3 の等比数列であり

$$d_{2n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

であるから, ① より,  $b_{2n+1} = b_{2n-1} + 12 \cdot 3^n \cdots \textcircled{3}$

③ より,

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \\ b_{2n-1} &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 12 \cdot 3^k \\ &= 2 + \frac{36\{3^{n-1} - 1\}}{3 - 1} = 3 + 18 \cdot 3^{n-1} - 18 = 6 \cdot 3^n - 16 \\ n = 1 \text{ のとき, 成立. } \quad \therefore b_{2n-1} &= 6 \cdot 3^n - 16 \end{aligned}$$

$$\therefore b_{2n+1} = 6 \cdot 3^{n+1} - 16 \cdots (\text{答})$$

$$(3) A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_{2n} \text{ であり,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ において, } \Delta = 1 (\neq 0) \text{ であるから}$$

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n+1} & b_{2n+1} \\ c_{2n+1} & d_{2n+1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore b_{2n} = b_{2n+1} - 3d_{2n+1} = 6 \cdot 3^{n+1} - 16 - 3 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+2} - 16$$

したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+2} - 16}{3^{n+2} - 16} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{16}{3^{n+2}}}{1 - \frac{16}{3^{n+2}}} = 2 \cdots (\text{答})$$

—解答例—

4

- (1) P, Q における接線の方程式は

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② より

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix} \text{ において}$$

$$\Delta = \cos \theta \sin 3\theta - \sin \theta \cos 3\theta = \sin 2\theta$$

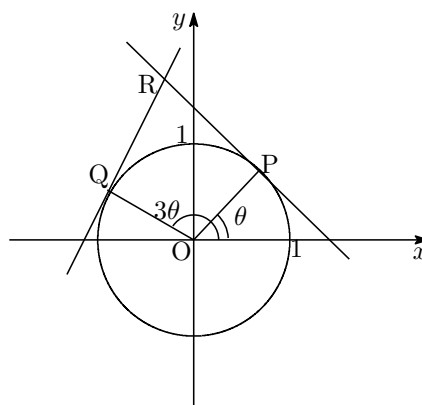
$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } \sin 2\theta > 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin 2\theta} \begin{pmatrix} \sin 3\theta & -\sin \theta \\ -\cos 3\theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\sin 3\theta - \sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{2 \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$$

$$y = \frac{-\cos 3\theta + \cos \theta}{\sin 2\theta} = \frac{4 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} = 2 \sin \theta$$

$$\alpha = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}, \quad \beta = 2 \sin \theta \cdots (\text{答})$$



- (2)  $x = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ ,  $y = 2 \sin \theta$  より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2 \sin 2\theta \cos \theta + \sin \theta \cos 2\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{-4 \sin \theta \cos^2 \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{-\sin \theta (2 \cos^2 \theta + 1)}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

| $\theta$             | $\frac{\pi}{6}$      | $\cdots$   | $\frac{\pi}{4}$ |
|----------------------|----------------------|------------|-----------------|
| $\frac{dx}{d\theta}$ |                      | $-$        |                 |
| $x$                  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | 0               |
| $\frac{dy}{d\theta}$ |                      | $+$        |                 |
| $y$                  | 1                    | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$      |

増減表, グラフより, 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{2}} x dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \left[ \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

