3 の倍数と 3 のつく数

数年前，お笑いコンビ「ジャリズム」の渡辺(わたなべ)鐘(あつむ)さん $\Longrightarrow$ **通称：「世界のナベアツ」**の

(条件)　「3 の倍数と，3 のつく数字のときにアホになる」

というネタがブレイクした．このことを話題にして考えてみよう．

(1) 1 から 100 までの自然数のうち条件をみたす数はいくつあるか．

(2) 1 から 10^n (n は自然数) までの自然数のうち，条件をみたす数が $f(n)$ 個あるという．
$f(n)$ を n を用いて表しなさい．

—解答例—

$\boxed{\text{解答}}$ （以下の解答・解説は「青空学園数学科」で紹介されていた。南海先生によるものである.）

(1) すべて数え上げて正解を得るが，(2) にも対応できるように一般性を追求してみよう．
100 は 3 の倍数でもなく，数字の 3 も現れないので，1〜99 までの数を考える．
3 を用いないでつくられる数は全部で, $9^2 = 81$ 個あるが
そのうち，3 の倍数，3 で割って 1 余る数，3 で割って 2 余る数は同数個ずつある．
したがって，条件をみたさない数は

$$\frac{2}{3} \times 81 = 54\ (\text{個})$$

ある．よって求める個数は

$$99 - 54 = \mathbf{45\ (個)} \cdots \mathbf{(答)}$$

(2) 条件をみたさない数が $g(n)$ 個あるとする．
10^n は条件をみたさないので，1 から $(10^n - 1)$ までの $(10^n - 1)$ 個の数のうち

$$1 = \overbrace{000\cdots\cdots0}^{(n-1)\ \text{個の}\ 0}1, \quad 256 = \overbrace{000\cdots\cdots0}^{(n-3)\ \text{個の}\ 0}256$$

などと表すとすると，各桁が 3 をのぞく 0 から 9 までの数字のいずれかであるような n 桁の数は全部で

$$9^n\ \text{個}$$

ある．このうち，3 の倍数，3 で割って 1 余る数，3 で割って 2 余る数は同数個ずつあるので

$$g(n) = \frac{2}{3} \times 9^n = 6 \cdot 9^{n-1}$$

したがって, 求める $f(n)$ は

$$\boldsymbol{f(n) = 10^n - 1 - 6 \cdot 9^{n-1}} \cdots \mathbf{(答)}$$

ちなみに

$$\begin{cases} 1\sim1000 \quad (=10^3) & \text{のとき，}\quad f(3) = 10^3 - 1 - 6 \cdot 9^2 = \mathbf{513}\ \text{個} \\ 1\sim10000 \quad (=10^4) & \text{のとき，}\quad f(4) = 10^4 - 1 - 6 \cdot 9^3 = \mathbf{5625}\ \text{個} \end{cases}$$