

考える問題

(提出自由)

(2014.4.23 (水) 〆切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No 1

組 番 名前 _____

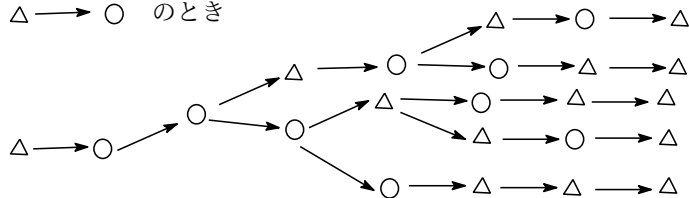
- 1 オオカミが4匹、ヒツジが4匹いる。これらの8匹を1つのオリの中に入れるのに、オオカミの数がヒツジの数より多くなると、ヒツジは食べられてしまう。同数以下なら食べられない。このとき、ヒツジが食べられないようにこの8匹を1匹ずつすべてオリの中に入れる方法は何通りあるか。ただし、オオカミ4匹は区別せず、ヒツジ4匹も区別しないものとする。

—解答例—

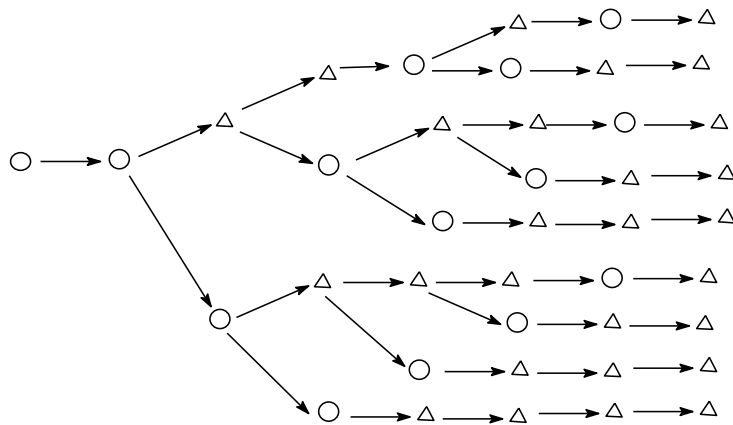
△をオオカミ、○をヒツジとして樹形図を書いてみる。(△の数が○の数より多くならないように考えて)

(i)

△ → ○ のとき

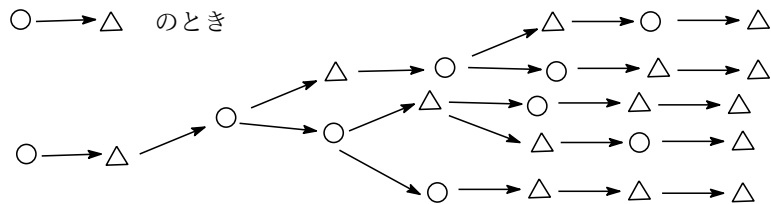


(ii) ○ → ○ のとき



(iii)

○ → △ のとき



以上より、求める場合の数は $5 + 9 + 5 = 19$ 通り (答)

考える問題

(提出自由)

(2014.4.30 〆切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No 2

組 番 名前 _____

2 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。

(例えば 4 段を (2, 2) と昇ることはできません)

11 段ある階段を昇る昇り方は全部で何通りあるか。

(類・京都大)

—解答例—

解 1 (ポイント:具体的に実験してみることが大切です。)

1 歩で 1 段昇るのを x 回, 2 段昇るのを y 回として, 11 段を昇りきるのには次の各場合が考えられる。

x	11	9	7	5	3
y	0	1	2	3	4

以下, 2 段の組が続かないように並べる方法を考えると,

- (i) $(x, y) = (11, 0) \cdots 1$ 通り
- (ii) $(x, y) = (9, 1) \cdots {}_{10}C_1 = 10$ 通り
- (iii) $(x, y) = (7, 2) \cdots {}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ 通り
- (iv) $(x, y) = (5, 3) \cdots {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ 通り
- (v) $(x, y) = (3, 4) \cdots {}_4C_4 = 1$ 通り

(例)
 $(x, y) = (5, 3)$ の場合

 $\cdots 1$ 段
 $\cdots 2$ 段の候補

(i)~(vi) より求める場合の数は, $1 + 10 + 28 + 20 + 1 = 60$ 通り (答)

解 2 n 段を昇る方法を $f(n)$ 通りとする。

(ア) 最初に 1 段昇るときは, 残り $(n - 1)$ 段を昇ればよい。

(イ) 最初に 2 段昇るときは, 次は 1 段しか昇れないので, 残り $(n - 3)$ 段を昇る方法を考える。

(ア), (イ) の 2 つの場合は同時には起こらないので, 和の法則より

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 3) \quad (n \geq 4) \cdots \cdots (*)$$

が成り立つ。ここで, $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ であるから, (*) より

$$f(4) = f(3) + f(1) = 4, f(5) = f(4) + f(2) = 6, f(6) = f(5) + f(3) = 9$$

$$f(7) = f(6) + f(4) = 13, f(8) = f(7) + f(5) = 19, f(9) = f(8) + f(6) = 28 \quad (\text{以下})$$

$$f(10) = f(9) + f(7) = 41$$

$$\therefore f(11) = f(10) + f(8) = 41 + 19 = 60 \text{ 通り (答)}$$

註 (*) のような式を, ^{ぜんかしき}漸化式という。

考える問題

(提出自由)

(2014.6.2 〆切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No3

組 番 名前 _____

3

ある硬貨を投げるとき、表と裏がおのおのの確率 $\frac{1}{2}$ で出るものとする。

この硬貨を 8 回繰り返して投げ、 n 回目に表が出れば $X_n = 1$ 、裏が出れば $X_n = -1$ とし、

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (1 \leq n \leq 8)$$

とおく。このとき次の確率を求めよ。

(1) $S_2 \neq 0$ かつ、 $S_8 = 2$ となる確率

(2) $S_4 = 0$ かつ、 $S_8 = 2$ となる確率

(東大・文科)

—解答例—

(1) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (1 \leq n \leq 8)$

に対して、題意より $S_2 \neq 0$ かつ、 $S_8 = 2$ となるのは

(i) $X_1 = X_2 = 1$; $X_3, X_4, \dots, X_8$ の 3 つが $+1$, 3 つが -1

であるか、または

(ii) $X_1 = X_2 = -1$; $X_3, X_4, \dots, X_8$ のひとつが -1 , 5 つが $+1$ の場合である。

$$\begin{cases} \text{(i) の場合の確率は} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10}{2^7} \\ \text{(ii) の場合の確率は} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{2^7} \end{cases}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{10}{2^7} + \frac{3}{2^7} = \frac{13}{128} \quad (\text{答})$$

(2) $S_4 = 0$ かつ、 $S_8 = 2$ となる のは

X_1, X_2, X_3, X_4 の 2 つが -1 , 2 つが $+1$

かつ、 X_5, X_6, X_7, X_8 の 1 つが -1 , 3 つが $+1$

の場合である。よって、求める確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{32} \quad (\text{答})$$

考える問題

(提出自由)

(2014.6.11 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No4

組 番 名前 _____

4 素数とは 1 とその数以外には約数をもたない自然数のことである.(1 は素数ではない)(1) p は 3 より大きい素数とする. p^2 を 12 で割るとき, 余りはいくらか.

—解答例—

3 より大きい素数はすべて 6 で割ると 1 余るか, 5 余る数のいずれかである.

$$p = 6n \pm 1 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくとき

$$\begin{aligned} p^2 &= (6n \pm 1)^2 = 36n^2 \pm 12n + 1 \\ &= 12(3n^2 \pm n) + 1 \\ 3n^2 \pm n &\text{ は } 0 \text{ 以上の整数であるから} \\ p^2 &\text{ を } 12 \text{ で割ると余りは } 1 \text{ (答)} \end{aligned}$$

(2) p は 3 より大きい素数とする. $p+2$ も素数であるとき, p と $p+2$ の和は 12 の倍数であることを示しなさい.

—解答例—

2 数の和は

$$p + (p+2) = 2(p+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 p と $p+2$ は 3 より大きい素数であるから, 奇数でありかつ, 3 の倍数ではない.したがって, 連続する 3 つの整数 $p, p+1, p+2$ について

$$p+1 \text{ は } 2 \text{ の倍数であり, かつ, } 3 \text{ の倍数である} \implies p+1 \text{ は } 6 \text{ の倍数} \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$p + (p+2) = 2(p+1) \text{ は } 12 \text{ の倍数である} \quad \cdots \text{(終)}$$

註 p と $p+2$ がともに素数であるとき, ふたご素数 双子素数 という. 双子素数が無数個あるかどうかはまだわかっていない.

考える問題

(提出自由)

(2014.6.25 〆切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No5

組 番 名前 _____

5 何人かで1回だけじゃんけんをするとき、あいこ（勝ち抜けがない）である確率を求める.

- (1) 3人がじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めよ.
- (2) 5人がじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めよ.
- (3) n 人がじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めよ. ただし, $n \geq 2$

—解答例—

- (1) 3人の手の出し方は全部で $3^3 = 27$ 通りあり, 3人ともグー, チー, と同じ手を出す場合が3通りある. また, 3人とも異なる手の出し方が, $3! = 6$ 通り. したがって, 求める確率は

$$\frac{3+6}{27} = \frac{1}{3} \text{ (答)}$$

- (2) 5人のときあいこになるのは次の3つの場合がある.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i) 5人とも同じ手を出す.} & \dots\dots 3 \text{ 通り} \\ \text{(ii) 5人が } (3, 1, 1) \text{ と3種類の手を出す} & \dots\dots {}_5C_3 \cdot {}_2C_1 \cdot 3 = 60 \text{ 通り} \\ \text{(iii) 5人が } (2, 2, 1) \text{ と3種類の手を出す} & \dots\dots {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot 3 = 90 \text{ 通り} \end{array} \right.$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{3+60+90}{3^5} = \frac{153}{243} = \frac{17}{27} \text{ (答)}$$

- (3) n 人のうち, r ($1 \leq r \leq n-1$) 人がどの手で勝つかということを考えると

$$\begin{aligned} & 3 \times {}_nC_1 + 3 \times {}_nC_2 + 3 \times {}_nC_3 + \dots\dots + 3 \times {}_nC_{n-1} \\ &= 3({}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots\dots + {}_nC_{n-1}) \\ &= 3(2^n - 2) \text{ 通り } (\because {}_nC_0 + {}_nC_1 + \dots\dots + {}_nC_n = 2^n) \end{aligned}$$

したがって, 余事象の関係から求める確率は

$$1 - \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 6}{3^n} \text{ (答)}$$

.....

別解 「誰かが勝ち抜ける」 $\Rightarrow n$ 人の出す手が2種類である場合を考える

$$\Rightarrow \underbrace{{}_3C_2}_{\text{どの2種類か}} \times \underbrace{(2^n - 2)}_{\text{1種類になるのを除く}} \text{ 通り}$$

よって, 求める確率は

$$1 - \frac{3 \cdot (2^n - 2)}{3^n} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 6}{3^n} \text{ (答)}$$

考える問題

(提出自由)

(2014.9.10 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No6

組 番 名前 _____

- 6 $a > b > c > d > e > f$ を満たし, $a + f = b + e = c + d = 22$ となるような正の整数の組 (a, b, c, d, e, f) は全部でいくつあるか.

—解答例—

解 1 平均をとると

$$\frac{a+f}{2} = \frac{b+e}{2} = \frac{c+d}{2} = 11$$

であるから,

$$f < e < d < 11 < c < b < a$$

であり, $1, 2, 3, \dots, 10$ の内から 3 個の数 f, e, d をとれば a, b, c の取り方は自然に決まる. よって, 場合の数は

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ 通り (答)}$$

解 2 加えて 22 になるような 2 つの正整数の組は

$$(1, 21), (2, 20), \dots, (10, 12)$$

の 10 組あり, そのうちから 3 組を選べば, (a, b, c, d, e, f) は自動的に決まる.

$$\therefore {}_{10}C_3 = 120 \text{ 通り (答)}$$

考える問題

(提出自由)

(2014.9.25 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

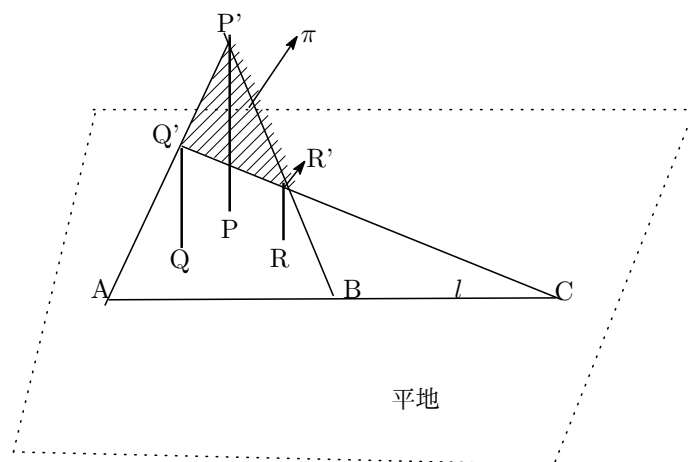
No7

組 番 名前 _____

- 7 平地にテレビ塔が3本立っている. 異なる3地点 A, B, C でそれらの先端を眺めるとき, どの地点でも3本のうちの2本の先端が重なって見えたという. 3点 A, B, C は一直線上にあることを示しなさい.
(改題 京都大)

—解答例—

証明



3本のテレビ塔の元を P, Q, R とし, 先端を, P', Q', R' とする。

直線 $P'Q'$, $P'R'$, $Q'R'$ の延長線が異なる3地点で平地と交わることから, P' , Q' , R' は同一直線上ではなく, 三角形をつくり, 平面 $P'Q'R'$ を決定する。それを π とする。

平面 π と平地との交線を l とすると, 3点 A, B, C はその交線上の点である。

よって, 題意は成り立つ。(終)

— 平面の決定条件 (空間図形を考えると重要!) —

次の各条件は, それぞれ平面の決定条件であり, 同値である。

- ① 同一直線上にない3点 (三角形ができる)
- ② 交わる2直線
- ③ 平行な2直線
- ④ 1点とその点を通らない直線

考える問題

(提出自由)

(2014.10.2 不切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No8

組 番 名前 _____

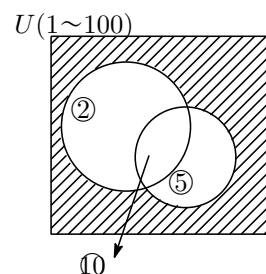
- 8 100 以下の自然数で、100 と互いに素である数はいくつあるか。また、それらの数の総和を求めよ。必要ならば、公式 $\left(1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$ は使用してよいものとする。

—解答例—

解 1 $100 = 2^2 \times 5^2$ と素因数分解できる。

1~100 までの数で、2 または 5 の倍数を調べる。

- (i) 2 の倍数は、 $2 \times 1, 2 \times 2, \dots, 2 \times 50$ (50 個)
- (ii) 5 の倍数は、 $5 \times 1, 5 \times 2, \dots, 5 \times 20$ (20 個)
- (iii) 10 の倍数は、 $10 \times 1, 10 \times 2, \dots, 10 \times 10$ (10 個)



したがって、2 または 5 の数の個数は、 $50 + 20 - 10 = 60$

よって、100 と互いに素である数の個数は

$$100 - 60 = 40 \text{ (答)}$$

また、1~100 のうち互いに素でない数の和は

$$\begin{aligned} & 2(1 + 2 + \cdots + 50) + 5(1 + 2 + \cdots + 20) - 10(1 + 2 + \cdots + 10) \\ &= 2 \cdot \frac{50(50+1)}{2} + 5 \cdot \frac{20(20+1)}{2} - 10 \cdot \frac{10(10+1)}{2} \\ &= 50 \times 51 + 5 \times 10 \times 21 - 10 \times 5 \times 11 \\ &= 2550 + 1050 - 550 = 3050 \end{aligned}$$

したがって、求める和は

$$(1 + 2 + \cdots + 100) - 3050 = \frac{100(100+1)}{2} - 3050 = 2000 \text{ (答)}$$

解 2 (和) 和を S とおくと

$$S = 1 + 3 + 7 + \cdots + 99, \text{ これを逆に書いて}$$

$$S = 99 + 97 + 93 + \cdots + 3 + 1$$

$$\therefore 2S = \underbrace{100 + 100 + 100 + \cdots + 100}_{40 \text{ 個}} \quad \text{ゆえに } S = \frac{100 \times 40}{2} = 2000 \text{ (答)}$$

註 $100 = 2^2 \times 5^2$ と互いに素な数の個数は $100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$ と計算できる。(これをオイラー関数という)

考える問題

(提出自由)

(2014.10.9 〆切)

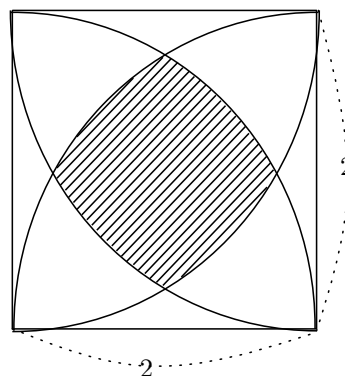
(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No9

組 番 名前 _____

9

半径 2 の円弧によって囲まれた斜線部分の面積 S を求めなさい。ただし、円周率は π を用いるものとします



—解答例—

図の扇形 BPQ の面積から、 $\triangle BPQ$ の面積を引いた部分の面積を求める。

$$QR = 2 - 2(2 - \sqrt{3})$$

$= 2(\sqrt{3} - 1)$ より正方形 PQSR の面積は

$$PQSR = \frac{1}{2} \times \{2(\sqrt{3} - 1)\}^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

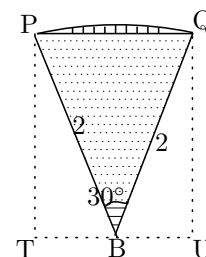
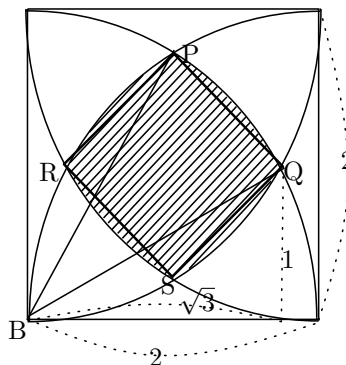
$$\text{また, } PQ = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} PT &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\triangle BPQ = \frac{1}{2} \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\text{弓形 PQ} = \pi \times 2^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ} - 1 = \frac{\pi}{3} - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= 8 - 4\sqrt{3} + 4\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) \\ &= 4\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right) \text{ (答)} \end{aligned}$$



考える問題

(提出自由)

(2014.10.30 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No10

組 番 名前 _____

10 $1, 2, 3, \dots, 3n$ (n は自然数) の中から異なる 3 数を取り出して小さい順に並べる.

- (1) すべての取り出し方は何通りか.
- (2) 3 数のうち隣り合う 2 数の差も n 以上である取り出し方は何通りか.
- (3) 3 数のうち隣り合う 2 数の差も n 以下である取り出し方は何通りか.

—解答例—

- (1)
- $3n$
- から 3 個取り出す組合せの数であるから,

$${}_{3n}C_3 = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!} = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2} \text{ 通り (答)}$$

- (2) 3 数を
- x, y, z
- (
- $x < y < z$
-) とするとき,

$$y - x \geq n, \quad z - y \geq n \quad \text{を同時に満たすことより}$$

x と y , y と z の間にそれぞれ $(n-1)$ 個のスペースを取り除いて, 残り $3n - 2(n-1) = n+2$ 個のスペースから 3 個を取り出す組合せの数を考えればよい.

$$\therefore {}_{n+2}C_3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ 通り (答)}$$

- (3) 前問の
- x, y, z
- に対して

$$A \cdots y - x \geq n+1 \quad \text{を満たす 3 数の取り出し方,}$$

$$B \cdots z - y \geq n+1 \quad \text{を満たす 3 数の取り出し方}$$

とする. 求める場合は, $y - x \leq n$ かつ, $z - y \leq n$ のときである.

一般に, 事象 X の起こる場合の数を $N(X)$ と表すものとするとき,

求める場合の数は, $N(\overline{A \cap B})$ である.

$$\begin{aligned}
 N(\overline{A \cap B}) &= N(\overline{A \cup B}) = {}_{3n}C_3 - N(A \cup B) \\
 &= {}_{3n}C_3 - \{N(A) + N(B) - N(A \cap B)\} \\
 &= {}_{3n}C_3 - N(A) - N(B) + N(A \cap B) \\
 &= {}_{3n}C_3 - {}_{2n}C_3 - {}_{2n}C_3 + {}_n C_3 \\
 &= \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2} - 2 \times \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\
 &= \frac{n\{3(3n-1)(3n-2) - 4(2n-1)(2n-2) + (n-1)(n-2)\}}{6} \\
 &= n^2(2n-1) \text{ 通り (答)}
 \end{aligned}$$

考える問題

(提出自由)

(2014.11.6 〆切)

(提出者には添削し、解説をつけて返却します)

No11

組 番 名前 _____

- 11 相異なる 3 つの複素数からなる数の組がある。この 3 つの数から重複を許して 2 個の数を取り出した積は、その 3 数のいずれかになるという。このような 3 数の組をすべて求めよ。

—解答例—

求める複素数の集合を、 $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ とする。

(i) $\alpha\beta\gamma \neq 0$ のとき、

M の要素それぞれに、 $\alpha (\neq 0)$ をかけた数、 $\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma$ は、相異なる 3 数であり、しかも α, β, γ のいずれかである。

$$\therefore M = (\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma)$$

とおける。2 つの等しい集合においては、積が等しいから、

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha^2)(\alpha\beta)(\alpha\gamma)$$

$\alpha\beta\gamma \neq 0$ であるから、 $\alpha^3 = 1$ よって、 $\alpha = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ のとき, } w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

以下、

$$M = (\alpha, \beta^2, \beta\gamma), \quad M = (\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma^2)$$

としても同様に、 $\beta = 1, \omega, \omega^2, \gamma = 1, \omega, \omega^2$ を得る。

α, β, γ は相異なるから、 $M = (1, \omega, \omega^2)$

(ii) $\alpha\beta\gamma = 0$ のとき、 $\alpha = 0$ として一般性を失わない。

$M = (0, \beta, \gamma)$ とおく。

$\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ で、 $\beta \neq \gamma$

(i) と同様に考えて、 $\beta^2\beta\gamma = \beta\gamma \therefore \beta^2 = 1 \therefore \beta = \pm 1$ また、 $\gamma = \pm 1$

以上より、 $M = (0, 1, -1)$

よって求める 3 数は、

$$(1, \omega, \omega^2), (0, 1, -1) \quad \left(\text{ただし, } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \quad (\text{答})$$

注 このような集合を、群「乗法群」(大学の代数学で学習)という。なお、東工大では「3 つの異なる複素数 (本問)」, 広島大学では「4 つの異なる複素数の組」が出題された。

「広島大の解答」 $\Rightarrow (0, 1, \omega, \omega^2), (1, -1, i, -i) (i = \sqrt{-1})$

考える問題

(提出自由)

(2014.11.13 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No12

組 番 名前 _____

- 12 $\triangle OAB$ は $OA = AB$ なる二等辺三角形とし, その外側に $\triangle OAB$ と相似な $OB = BC$ となる二等辺三角形 $\triangle OBC$ をつくる. 辺 OB の垂直二等分線と辺 BC の垂直二等分線の交点を P とするとき, $\angle POA$ は直角であることを示せ.

—解答例—

解 1

$\angle AOB = \angle ABO = \angle BOC = \angle BCO = \theta$ とおく.

OB の中点を M , OC の中点を N とする.

MP は辺 OB の垂直二等分線であるから

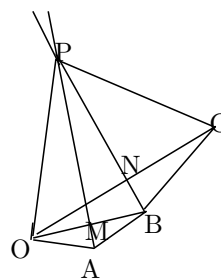
$$PO = PB, \quad \angle POB = \angle PBO \quad \dots\dots ①$$

また, $PO = PB = PC$ と $OB = BC$ より, BP は辺 OC の垂直二等分線であり, 中点 N を通るから, 直角三角形 OBN について

$$\angle PBO = \angle NBO = 90^\circ - \theta \quad \dots\dots ②$$

①, ② より

$$\begin{aligned} \angle POA &= \angle POB + \angle AOB \\ &= (90^\circ - \theta) + \theta = 90^\circ \text{ (終)} \end{aligned}$$



解 2

$PO = PB = PC$ であるから, 点 P は $\triangle OBC$ の外接円の中心 (外心) である.

点 O における外接円の接線を ℓ とするとき, $OP \perp \ell$

また, $OA = AB$, $\triangle OAB \sim \triangle OBC$ より

$$\angle AOB = \angle OBA = \angle OCB$$

であることから, 点 A は ℓ 上にある. よって

$$\angle POA = 90^\circ \text{ (終)}$$

考える問題

(提出自由)

(2014.11.20 〆切)

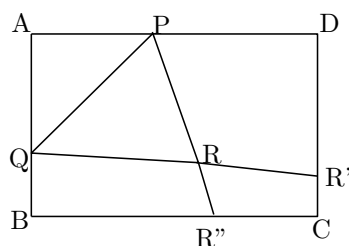
(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No13

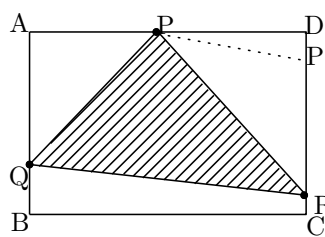
組 番 名前 _____

- 13 長方形の中に置かれた三角形の面積は, もとの長方形の面積の $\frac{1}{2}$ を越えないことを示しなさい.

—解答例—



(図 1)



(図 2)

長方形 ABCD の中でできるだけ大きな三角形 PQR をとるようにする.

点 P, Q は適当に平行移動すればよいので, 2 辺の上にとればよい. 点 R を図 1 のようにとるとき, $\triangle PQR \leq \triangle PQR', \triangle PQR''$ となることから, R もまた辺上にとれば十分である. (図 2)

点 P を AD 上, 点 Q を AB 上にとる. R は, BC 上でも CD でもよい (P, Q, R は相互変換できる). いま, 図 2 のように点 P から QR に平行な直線を引き, CD との交点を P' とするとき

$\triangle PQR$ と $\triangle P'QR$ の面積は等しい

$AB = x, \quad BC = y, \quad P'R = a$ とおくとき

$$\triangle PQR = \triangle P'QR = \frac{1}{2}ay \leq \frac{1}{2}xy \quad (\because a \leq x)$$

であるから, 題意が成り立つ (終)

(1994 年 名古屋大学・理系)

考える問題

(提出自由)

(2014.11.27 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

No14

組 番 名前 _____

14

右図 $\triangle ABC$ において,
 $AB : AC = 3 : 4$ とする. また, $\angle A$ の二等分線と辺
 BC との交点を D とする. さらに

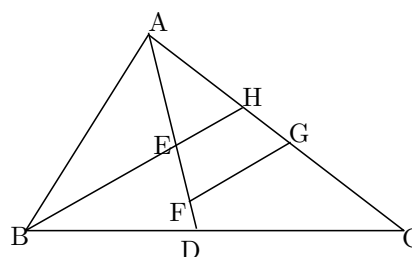
線分 AD を $5 : 3$ に内分する点を E ,
 線分 ED を $2 : 1$ に内分する点を F ,
 線分 AC を $7 : 5$ に内分する点を G ,

とする. 直線 BE と辺 AC との交点を H とすると
 き, 次の問に答えよ.

(1) $\frac{AH}{HC}$ の値を求めよ.

(2) $BH \parallel FG$ であることを示せ.

(3) $FG = 7$ のとき, 線分 BE の長さを求めよ.



—解答例—

(1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから $BD : DC = AB : AC = 3 : 4$

メネラウスの定理により

$$\frac{AH}{HC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DE}{EA} = 1 \quad \therefore \frac{AH}{HC} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad \text{したがって, } \frac{AH}{HC} = \frac{5}{7} \text{ (答)}$$

(2) $AH : HC = 5 : 7$, $AG : GC = 7 : 5$ より, $AH : AG = 5 : 7$

また, $AE : AF = 5 : 7$ かつ, $\angle DAC$ は共通であるから, $\triangle AEH \sim \triangle AFG$

したがって, $\angle AEH = \angle AFG$ であるから, $BE \parallel FG$ (終)

(3) $EH : FG = 5 : 7$ より, $EH = 5$

ふたたび, メネラウスの定理により

$$\frac{AC}{CH} \cdot \frac{HE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1 \quad \text{であるから} \quad \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{EB} \cdot \frac{3}{4} = 1$$

であるから

$BE = 9$ (答)

考える問題

(提出自由)

(2015.1.22 〆切)

(提出者には添削し, 解説をつけて返却します)

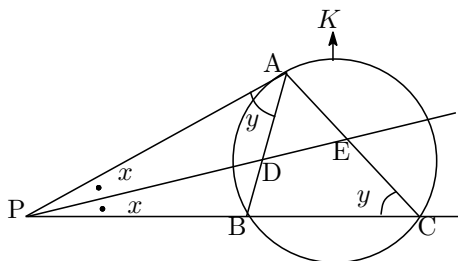
No15

組 番 名前 _____

- 15 円 K の外部の点 P から円 K に引いた接線の接点を A とする. 点 P を通り円 K と 2 点 B, C で交わる直線を引く.

$\angle APB$ の 2 等分線が線分 AB, AC と交わる点をそれぞれ D, E とするとき, $AD = AE$ であることを示しなさい.

—解答例—



題意をみたす図は上のようになる.

ここで, $\angle APD = \angle BPD = x$, $\angle PAB = y$ とおく.

直線 PA は円 K の接線であるから, 接弦定理により

$$\angle BCA = \angle PAB (= y)$$

三角形の外角の大きさは, それと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和に等しいから
 $\triangle PAD$ において

$$\angle ADE = \angle APD + \angle PAD = x + y \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle PCE$ において

$$\angle AED = \angle CPE + \angle PCE = x + y \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \angle ADE = \angle AED$$

底角が等しい $\triangle ADE$ は 2 等辺三角形であるから

$$AD = AE \cdots (\text{証終})$$