

(書いた手紙のゆく先は？＝^{かくらん}攪乱順列の問題)

—— その1 4人が書いた手紙について誰も自分の手紙を受け取らない ——

A, B, C, D の4人がそれぞれ手紙を書いて箱の中に入れた。箱の中は見えないものとする。4人はこの順に無作為に1枚ずつ取り出す。誰も自分の書いた手紙を受け取らないのは何通りあるだろうか。

— 解答例 —

A, B, C, D の書いた手紙をそれぞれ a, b, c, d として、この並び方を考える。

すべての並び方は、 $4! = 24$ (通り) あるが、そのうち A の下のみ a がくるのは

B, C, D の下には $(c, d, b), (d, b, c)$ の2通り。

したがって、1つのみ合致するのは、 ${}_4C_1 \times 2 = 8$ (通り)

2つが合致するのは、たとえば A, B の下に (a, b) がくるのは C, D の下に (d, c) がくる1通りのみ。

ゆえに、 ${}_4C_2 \times 1 = 6$ (通り)

また、3つが合致するのは、4つとも合致するときで1通り

以上により、題意の場合は $24 - (8 + 6 + 1) = 9$ 通り (答)

—— その2 5人が書いた手紙について誰も自分の手紙を受け取らない ——

A, B, C, D, E の5人が手紙を書いた。同じような操作をした後、誰も自分の手紙を受け取らないのは何通りあるだろうか？

— 解答例 —

前問と同様に考える。

まず、1つのみが合致するのは9通りあり、それらは ${}_5C_1 = 5$ (通り) ずつ。

$$\therefore 9 \times 5 = 45 \text{ (通り)}$$

2つのみが合致するのは、残り3つはバラバラであるから

$${}_5C_2 \times 2 = 20 \text{ (通り)}$$

3つが合致するのはそれぞれ1通りであるから

$${}_5C_3 \times 1 = 10 \text{ (通り)}$$

4つが合致するのは、5つとも合致することから

$$1 \text{ (通り)}$$

すべての並び方は $5!$ 通りであるから、求める場合の数は

$$5! - (45 + 20 + 10 + 1) = 44 \text{ 通り (答)}$$

さらに続けて 6 人, 7 人の場合は……

補題その 3…^{かくらん}攪乱順列

A, B, C, D, E, F の 6 人が、同じ操作をするときどうか。

—解答例—

前問と同様に考える。

まず, 1 つのみが合致するのは 44 通りあり, それらは ${}_6C_1 = 6$ (通り) ずつ。

$$\therefore 44 \times 6 = 264 \text{ (通り)}$$

2 つのみが合致するのは, 残り 4 つはバラバラであるから

$${}_6C_2 \times 9 = 135 \text{ (通り)}$$

3 つが合致するのはそれぞれ 2 通りであるから

$${}_6C_3 \times 2 = 40 \text{ (通り)}$$

4 つが合致するのは, 2 つが合致しないのは 1 通り

$${}_6C_4 \times 1 = 15 \text{ (通り)}$$

5 つが合致するのは, 6 つとも合致するから 1 通りすべての並び方は $6! = 720$ 通りであるから, 求める場合の数は

$$6! - (264 + 135 + 40 + 15 + 1) = \mathbf{265 \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

補題その 4…^{かくらん}攪乱順列

A, B, C, D, E, F, G の 7 人が同じ操作をするときはどうか。

—解答例—

前問と同様に考える。

まず, 1 つのみが合致するのは 265 通りあり, それらは ${}_7C_1 = 7$ (通り) ずつ。

$$\therefore 265 \times 7 = 1855 \text{ (通り)}$$

2 つのみが合致するのは ${}_7C_2 \times 44 = 924$ (通り)

3 つが合致するのは ${}_7C_3 \times 9 = 315$ (通り)

4 つが合致するのは, ${}_7C_4 \times 2 = 70$ (通り)

5 つが合致するのは, ${}_7C_5 \times 1 = 21$ (通り)

6 つが合致するのは 1 通り

$$\therefore 7! - (1855 + 924 + 315 + 70 + 21 + 1) = \mathbf{1854 \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

【註】

一般に, n 個の完全順列 = 攪乱順列の場合を $f(n)$ 通りとすると,

$$f(n) = (n-1)\{f(n-1) + f(n-2)\} \quad (n \geq 4)$$

が成り立つ. $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3\{f(3) + f(2)\} = 9, f(5) = 4\{f(4) + f(3)\} = 44$