

— 互いに素である数の和 —

例えば 2 と 5 の共通の約数で最大のもの（最大公約数）は 1 です。一般に最大公約数が 1 である 2 つの数を「互いに素」といいます。

問題 100 より小さくて、100 と互いに素である自然数の総和はいくらでしょうか。(1 も含みます)

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{を用いてもよろしい.}$$

— 解答例 —

解 1 求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3 + 7 + 9 + \cdots + 91 + 93 + 97 + 99 \quad \text{であり, 逆から書くと} \\ S &= 99 + 97 + 93 + 91 + \cdots + 9 + 7 + 3 + 1 \quad \text{となるから} \\ 2S &= \underbrace{100 + 100 + 100 + \cdots + 100}_{40 \text{ 個}} \\ &= 100 \times 40 \quad \text{となり} \quad S = 100 \times 20 = \mathbf{2000} \text{ (答)} \end{aligned}$$

解 2 $100 = 2^2 \times 5^2$ であるから,

1 から 100 までの数の和から 2 または 5 の倍数の和を引けばよい.

2 の倍数の和を S_2 , 5 の倍数の和を S_5 , 10 の倍数の和を S_{10} とおくと

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) - \{S_2 + S_5 - S_{10}\} \\ S_2 &= 2 + 4 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + \cdots + 50) \\ &= 2 \times \frac{50(50+1)}{2} = 2550 \\ S_5 &= 5 + 10 + 15 + \cdots + 100 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) \\ &= 5 \times \frac{20(20+1)}{2} = 1050 \\ S_{10} &= 10 + 20 + \cdots + 100 = 10(1 + 2 + \cdots + 10) \\ &= 10 \times \frac{10(10+1)}{2} = 550 \\ S &= \frac{100(100+1)}{2} - S_2 - S_5 + S_{10} \quad \text{であるから} \\ S &= 5050 - 2550 - 1050 + 550 = \mathbf{2000} \text{ (答)} \end{aligned}$$

註 n が, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ と素因数分解されるとき, 加えて n になる数は

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

個ある.

$100 = 2^2 \times 5^2$ だから, $100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$ 個ある. この個数をオイラー関数という.