モールス信号？

○と×を横一列に並べるとき、次のような場合は何通りあるでしょうか。

(1) 全部で 5 個を並べるとき、×が連続しない場合は何通りあるでしょうか。

(2) 全部で 10 個を並べるとき、×が連続しない場合は何通りあるでしょうか。

なお，必要ならば n 個から r 個取り出す式 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$ を用いてもよい．

例えば ${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$

—解答例—

じつはこの問題は，階段を昇る問題と同じ内容である．

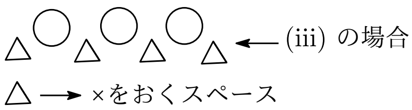
(1) すべての並べ方は $2^5 = 32$ 通りあるが，そのうち

(i) ○が 5 つの場合 $\cdots$ 1 通り

(ii) ○が 4 つ，×が 1 つの場合 $\cdots$ 5 通り

(iii) ○が 3 つ，×が 2 つの場合 $\cdots {}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り

(iv) ○が 2 つ，×が 3 つの場合 $\cdots$ 1 通り



以上より，求める並べ方は $1+5+6+1 = $ **13 通り** $\cdots$ **(答)**

(2) (1) と同様に考えて

(i) ○ 10 個のとき $\cdots$ 1 通り

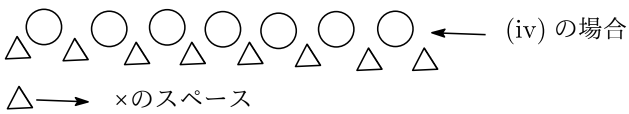
(ii) ○ 9 個，× 1 個のとき $\cdots$ 10 通り

(iii) ○ 8 個，× 2 個のとき $\cdots {}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通り

(iv) ○ 7 個，× 3 個のとき $\cdots {}_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$ 通り

(v) ○ 6 個，× 4 個のとき $\cdots {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$ 通り

(vi) ○ 5 個，× 5 個のとき $\cdots {}_6\mathrm{C}_5 = 6$ 通り



(i)〜(vi) より，$1+10+36+56+35+6 = $ **144 通り** $\cdots$ **(答)**

別解 一般に n 個の○と×を並べるとき，×が連続しない並べ方を $f(n)$ とする．ただし，$n \geqq 3$

最初に○がくる場合は，残り $(n-1)$ 個の並べ方は $f(n-1)$ 通り

最初に×がくる場合は，次は○で決まることから，残り $(n-2)$ 個の並べ方は $f(n-2)$ 通り

したがって，$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \cdots (*)$ が成り立つ．

$f(1) = 2,\ f(2) = 3$ であるから，($\because$ 1 個のときは，○か×の 2 通り，2 個のときは，○○，○×，×○ の 3 通り) $(*)$ より

$f(3) = f(2) + f(1) = 5, \quad f(4) = f(3) + f(2) = 8, \quad f(5) = f(4) + f(3) = \mathbf{13} \cdots (1)$

$f(6) = f(5) + f(4) = 21, \quad f(7) = f(6) + f(5) = 34, \quad f(8) = f(7) + f(6) = 55$

$f(9) = f(8) + f(7) = 89, \quad f(10) = f(9) + f(8) = $ **144 通り** $\cdots$ **(答)**

$(*)$ の式が成り立つ数列 $\{f(n)\}$ を，**フィボナッチ数列**という．