階段の昇り方は？

1歩で1段または2段のいずれかで階段を昇るとき，1歩で2段昇ることは連続しないものとする．15段の階段を昇る昇り方は何通りあるでしょうか？

—解答例—

1歩で1段昇るのを x 回，2段昇るのを y 回として，15段を昇りきるのは次の各場合が考えられる．

x	15	13	11	9	7	5
y	0	1	2	3	4	5

以下，2段の組が続かないように並べる方法を考えると，

$(x,\ y)=(15,\ 0)\cdots1$ 通り，　　$(x,\ y)=(13,\ 1)\cdots14$ 通り
$(x,\ y)=(11,\ 2)$ のとき，12個のスペースから2個のスペースを選ぶ方法を考えて

$$ {}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66 \text{ 通り} $$

$(x,\ y)=(9,\ 3)$ のとき，10個のスペースから3個を選ぶ方法を考えて

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120 \text{ 通り} $$

$(x,\ y)=(7,\ 4)$ のとき，8個のスペースから4個を選ぶ方法を考えて

$$ {}_{8}\mathrm{C}_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70 \text{ 通り} $$

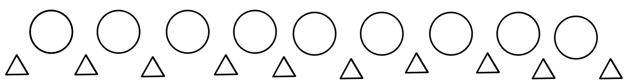
$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき，6個のスペースから5個を選ぶ方法を考えて

$$ {}_{6}\mathrm{C}_5=6 \text{ 通り} $$

したがって，昇り方の総数は

$$ 1+14+66+120+70+6=\mathbf{277\ 通り\ (答)} $$

（例）$(x,\ y)=(9,\ 3)$ の場合



○ $\cdots$1段　　，△ $\cdots$2段の候補

—解答例—

$\boxed{\text{別解}}$

n 段の階段を，問題の条件で昇る方法を $f(n)$ とおく．$n \geqq 4$ のとき，

(i) 1 歩目で 1 段昇るとき，残りの $(n-1)$ 段を昇るのは $f(n-1)$ 通り

(ii) 1 歩目で 2 段昇るとき，次の 1 歩は 1 段であるから，$(n-3)$ 段を昇る方法を考えて $f(n-3)$ 通り

(i) (ii) は互いに排反であることから, 次の式が成り立つ．

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3) \quad (n \geqq 4) \cdots\cdots\cdots (*)$$

ここで，$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$ であるから，$(*)$ により

$$\begin{aligned}
f(4) &= f(3)+f(1) = 4, \quad f(5) = f(4)+f(2) = 6 \\
f(6) &= f(5)+f(3) = 9, \quad f(7) = f(6)+f(4) = 13 \\
f(8) &= f(7)+f(5) = 19, \quad f(9) = f(8)+f(6) = 28 \\
f(10) &= f(9)+f(7) = 41, \quad f(11) = f(10)+f(8) = 60 \\
f(12) &= f(11)+f(9) = 88 \quad f(13) = f(12)+f(10) = 129 \\
f(14) &= f(13)+f(11) = 189, \quad f(15) = f(14)+f(12) = 277
\end{aligned}$$

したがって，求める場合の数は

277 通り $\cdots$ (答)