

0がいくつ並ぶ？

- (1) $30!$ を計算すると、最後に 0 がいくつ並ぶでしょうか。
(2) (1) において、最初に現れる 0 でない数字を求めなさい。

—解答例—

$$30! = 30 \times 29 \times 28 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

であり、0 の個数はすなわち、10 の何乗で割り切れるかということである。

$10 = 2 \times 5$ であるが、

1 から 30 までにおいて明らかに 5 の倍数の方が 2 の倍数より少ない。

したがって 5 の倍数を考えればよい。

$$\therefore 5, 10, 15, 20, 25 (= 5^2), 30$$

の 7 個であり、このとき $30!$ は $2^7 \times 5^7 = (10)^7$ で割り切れる。
すなわち、

7 個の 0 が並ぶ (答)

(2)

1~30 までの数のなかで素数は、

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 で 1~30 までの各数を素因数分解すると

$$\begin{aligned} 30! &= (2 \cdot 3 \cdot 5)(2^2 \cdot 7)(3^3)(2 \cdot 13)(5^2)(2^3 \cdot 3)(2 \cdot 11)(3 \cdot 7)(2^2 \cdot 5)(2 \cdot 3^2)(2^4)(3 \cdot 5)(2 \cdot 7)(2^2 \cdot 3) \\ &\quad \cdot (2 \cdot 5)(3^2)(2^3)(2 \cdot 3)(2^2) \cdot 29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 2^{19} \times 3^{14} \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times (2 \times 5)^7 \end{aligned}$$

となり、 $2^{19} \times 3^{14} \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$ の一の位の数求めればよい。

一般に自然数 n の一の位数を $f(n)$ で表すとする。

求めるのは

$f\{2^{19} \times 3^{14} \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29\}$ である。

$$f(2^{19}) = f(2^{10}) \times f(2^9) = f(4) \times f(2) = 8$$

$$f(3^{14}) = f(3^5) \times f(3^5) \times f(3^4) = 9$$

同様にして

$$f(7^4) = 1, \quad f(11^2) = 1, \quad f(13^2) = 9, \quad f(17 \times 19 \times 23 \times 29) = 1$$

よって求める数字は

$$f(8 \times 9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 1) = 8 \text{ (答)}$$