

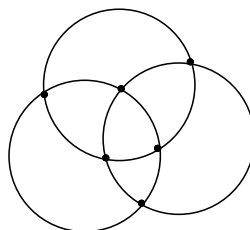
— 円でできる平面の数 —

平面上に円を 1 つ書くと、2 つの平面になります。2 つめの円を、最初の円と異なる 2 点で交わるように書くと、4 つの平面ができます。3 つめの円を前の 2 つの円とそれぞれ 2 点で交わり、しかも 3 つの円が 1 点で交わることはないように書いたとき平面はいくつできるでしょうか？このようにして 10 個の円を考えます。10 個の円のどの 2 つも異なる 2 点で交わり、しかもどの 3 つの円も 1 点で交わらないとき、平面はいくつできるでしょうか？

— 解答例 —

2 つの円はそれぞれ 2 個の交点を持ち、新しく 2 個の円弧をつくる。

ポイントは、新しくできる円弧の数だけ平面が増えていくということです。3 つ目の円は前の 2 つの円と新しく 2 点ずつで交わり、円弧は 4 個増えることから、新たに 4 つの平面ができます。一般に n 個の円でできる平面の数を $f(n)$ とおくと、



$$\begin{aligned} f(1) &= 2, & f(2) &= 2 + 2 \times 1 = 4, & f(3) &= 4 + 2 \times 2 = 8 \cdots (\text{答}) \\ f(4) &= 8 + 2 \times 3 = 14, & f(5) &= 14 + 2 \times 4 = 22, & f(6) &= 22 + 2 \times 5 = 32 \\ f(7) &= 32 + 2 \times 6 = 44, & f(8) &= 44 + 2 \times 7 = 58, & f(9) &= 58 + 2 \times 8 = 74 \\ f(10) &= 74 + 2 \times 9 = 92 \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

註 これを一般化してみます。 k ($k \geq 2$) 個目の円は、前の $(k-1)$ 個の円と新たに $2(k-1)$ 個の交点を持ち、新たに $2(k-1)$ 個の円弧を作る。したがって、 $2(k-1)$ 個の平面が新しくできることから

$$f(k) - f(k-1) = 2(k-1) \quad (k \geq 2) \cdots \cdots (*)$$

が成り立つ。(*)において、 $k = 2, 3, \cdots, n$ と代入すると

$$\begin{array}{rclcl} f(2) & - & f(1) & = & 2 \cdot 1 \\ f(3) & - & f(2) & = & 2 \cdot 2 \\ f(4) & - & f(3) & = & 2 \cdot 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(n) & - & f(n-1) & = & 2(n-1) \end{array}$$

辺々加えて

$$\begin{aligned} f(n) - f(1) &= 2 \{ 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \} \\ \therefore f(n) &= 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2 + n(n-1) \\ &= n^2 - n + 2 \cdots (n=1 \text{ も満たす}) \\ \therefore f(3) &= 3^2 - 3 + 2 = 8, \quad f(10) = 10^2 - 10 + 2 = 92 \end{aligned}$$

$$2(k-1) \text{ 個の交点} \implies \underline{\underline{2(k-1) \text{ 個の円弧}}} \iff \underline{\underline{2(k-1) \text{ 個の平面}}}$$