

時計の3針問題

「時計の3つの針（時針，分針，秒針）は，12時（零時）に重なるが，3針が重なるのはそのとき以外にはない．このことを証明しなさい．」

—解答例—

解答

時針（短針）が 30° 回転するとき，分針（長針）は， 360° 回転し，秒針は， 21600° 回転する．

従って時針が x 回転するとき，分針，秒針はそれぞれ $12x$ ， $720x$ 回転する．

この時刻に3つの針が重なるための条件は

$$12x - x = 11x, \quad 720x - x = 719x \text{ がともに整数であること} \cdots \textcircled{1}$$

である． $11x = n$ (n は整数) とおくと， $x = \frac{n}{11}$ より

$$719x = \frac{719}{11}n \text{ が整数であること} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が条件である．719 と 11 は互いに素であるから $\textcircled{2} \iff n$ が 11 の倍数であること $\iff x$ が整数．

よって，3つの針が重なるのは，時針が12時からちょうど整数回転したときに限る．

すなわち，12時（零時）以外にはない．（終）

別解

x 時間後の回転角を考える． Z を整数の集合とする．

$$\text{時針と分針が重なる} \iff 360x - 30x = 360m \ (m \in Z) \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{時針と秒針が重なる} \iff 21600x - 30x = 360n \ (n \in Z) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } x = \frac{12}{11}m \cdots \cdots (\star)$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } x = \frac{36}{2157}n = \frac{12}{719}n$$

$$\therefore \frac{12}{11}m = \frac{12}{719}n \iff n = \frac{719}{11}m$$

ここで 719 と 11 は互いに素であるから， m は 11 の倍数でなければならない．

このとき， $(\star)$ より x は 12 の倍数となる．よって，題意が成立．（終）

註

3つの針を同時に考えると混乱する．2つずつの組合せを考えることがポイント．