

第 1 問

p, q, r および α, β, γ は与えられた定数である。関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して、 a, b がどんな値をとっても、 $pf(\alpha) + qf(\beta) + rf(\gamma) = 0$ という関係式が成立するという。 α, β, γ が互いに異なるとき、 p, q, r はどんな値をとるか。

—解答例—

与えられた条件から、

$$\begin{aligned} p(\alpha^2 + a\alpha + b) + q(\beta^2 + a\beta + b) + r(\gamma^2 + a\gamma + b) &= 0 \\ \therefore (p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2) + a(p\alpha + q\beta + r\gamma) + b(p + q + r) &= 0 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

① がすべての a, b の値に対して成立することから

$$\begin{cases} p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 &= 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ p\alpha + q\beta + r\gamma &= 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ p + q + r &= 0 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

④ より、 $r = -p - q$ で、これと③、② より

$$\begin{aligned} p\alpha + q\beta - (p + q)\gamma &= 0 \iff p(\alpha - \gamma) + q(\beta - \gamma) = 0 \cdots \textcircled{5} \\ p\alpha^2 + q\beta^2 - (p + q)\gamma^2 &= 0 \iff p(\alpha^2 - \gamma^2) + q(\beta^2 - \gamma^2) = 0 \cdots \textcircled{6} \\ \therefore p(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) + q(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) &= 0 \text{ より} \\ \underbrace{-q(\beta - \gamma)(\alpha + \gamma)} + q(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) &= 0 \quad (\because \textcircled{5}) \\ \therefore q(\beta - \gamma)(\beta - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma$ であるから、 $q = 0$

このとき、⑤ から、 $p(\alpha - \gamma) = 0$ 、 $\therefore p = 0$ ($\because \alpha \neq \gamma$)

また、④ より、 $r = 0$ 、

以上により

$$\mathbf{p = q = r = 0} \quad (\text{答})$$

第 2 問

$\frac{(1 + \sqrt{3})^4}{4}$ の整数部分を a 、小数部分を b とおく。

(1) a を求めよ。

(2) $b^4 + 13b^3 + \frac{b^2}{2} - 8b - 7$ の値を求めよ。

—解答例—

(1)

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}, \quad \therefore (1 + \sqrt{3})^4 = (4 + 2\sqrt{3})^2 = 28 + 16\sqrt{3}$$

$$\text{ゆえに、} \frac{(1 + \sqrt{3})^4}{4} = 7 + 4\sqrt{3}$$

ここで、 $6 < 4\sqrt{3} < 7$ であることから、 $13 < 7 + 4\sqrt{3} < 14$

$$\therefore \mathbf{a = 13} \quad (\text{答})$$

(2)

このとき、 $b = (7 + 4\sqrt{3}) - 13 = 4\sqrt{3} - 6$ であり、

$$b + 6 = 4\sqrt{3} \text{ から、} (b + 6)^2 = 48 \quad \therefore b^2 + 12b - 12 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

一般に

$$\begin{array}{r} b^2 + 12b - 12 \overline{) b^4 + 13b^3 + \frac{1}{2}b^2 - 8b - 7} \\ \underline{b^4 + 12b^3 - 12b^2} \\ b^3 + \frac{25}{2}b^2 - 8b - 7 \\ \underline{b^3 + 12b^2 - 12b} \\ \frac{1}{2}b^2 + 4b - 7 \\ \underline{\frac{1}{2}b^2 + 6b - 6} \\ -2b - 1 \end{array}$$

であるから

$$b^4 + 13b^3 + \frac{b^2}{2} - 8b - 7 = (b^2 + 12b - 12) \left(b^2 + b + \frac{1}{2} \right) - 2b - 1$$

従って、 $b = 4\sqrt{3} - 6$ のとき、① より $b^2 + 12b - 12 = 0$ であるから

$$\text{与式} = -2(4\sqrt{3} - 6) - 1 = \mathbf{11 - 8\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

第 3 問

整数 n に対して、 $P(n) = n^3 - n$ とする。

- (1) $P(n)$ は 6 の倍数であることを示せ。
- (2) n が奇数ならば、 $P(n)$ は 24 の倍数であることを示せ。
- (3) $P(n)$ が 48 の倍数となる偶数 n をすべて求めよ。

—解答例—

証明

$$(1) P(n) = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

$P(n)$ は連続 3 整数の積であるから、2 の倍数と 3 の倍数は少なくとも 1 つずつある。

2 と 3 は互いに素であることから、 $2 \times 3 = 6$ の倍数である。(終)

$$(2) n \text{ が奇数のとき、} n - 1 \text{ と } n + 1 \text{ はいずれも偶数であり、しかもどちらか一方が 4 の倍数である。}$$

よって、8 の倍数である。3 の倍数であることは (1) より、明らか。

8 と 3 は互いに素であることから、24 の倍数である。(終)

$$(3) n - 1, \quad n + 1 \text{ は奇数で、} 48 = 2^4 \times 3 \text{ であり、}$$

$(n - 1)n(n + 1)$ が 3 の倍数である。3 と 16 は互いに素であるから

n が 16 の倍数となり、このとき逆に、 $P(n)$ は 48 の倍数である。

以上から、求める n は **16** の倍数 (答)

第 4 問

$\triangle ABC$ は、3 辺の長さが $AB = 1$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 2$ である。 $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ とするとき、次の問に答えよ。

- (1) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。このとき $\overrightarrow{AO} = s\vec{u} + t\vec{v}$ となる実数 s, t を求めよ。

—解答例—

(1)

余弦定理から

$$\cos \angle BAC = \frac{1 + 4 - 6}{2 \cdot 1 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

別解

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{6} \text{ から、} |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 6$$

$$\therefore |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 6$$

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \quad \therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} //$$

- (2) O から辺 AB , AC に垂線 OM , ON を下ろすと、 M, N は AB , AC の中点であり、

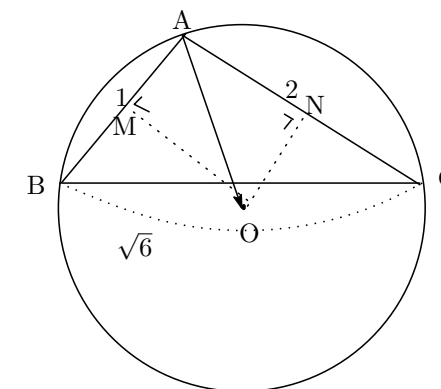
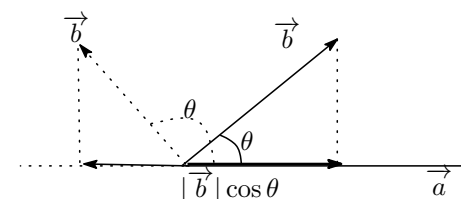
$$\text{内積の定義から} \begin{cases} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \times AB = \frac{1}{2} \\ \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = AN \times AC = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (s\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{u} = s - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1} \\ (s\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}s + 4t = 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \left(\because \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から、} \underline{s = \frac{4}{5}}, \quad \underline{t = \frac{3}{5}} \quad (\text{答})$$

ベクトルの内積の図形的な意味

ベクトル $\vec{b}$ のベクトル $\vec{a}$ への正射影の大きさとベクトル $\vec{a}$ の大きさの積を表すことに着目しよう。「大きさ」 $\iff$ 正負を考える。



第 5 問

自然数 n について, a_n を $\sqrt{n}$ の整数部分とする。例えば, $a_5 = 2$, $a_{40} = 6$ などである。

- (1) $a_n = 5$ となる n の個数を求めよ。
- (2) 自然数 l について, $a_n = l$ となる n の個数を l を用いて表せ。
- (3) t を 2 以上の自然数とすると, $\sum_{k=1}^{t^2-1} a_k$ を t を用いて表せ。

—解答例—

- (1) 題意より, $5 \leq \sqrt{n} < 6$ であるから,
 $5^2 \leq n < 6^2$ これを満たす n は, $6^2 - 5^2 = \underline{\underline{11}}$ (答)

- (2) $a_n = l \iff l^2 \leq n < (l+1)^2$
 これを満たす n の個数は,
 $(l+1)^2 - l^2 = \underline{\underline{2l+1}}$ (答)

- (3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t^2-1} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_{2^2} + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &\quad + (a_{3^2} + \cdots + a_{4^2-1}) + \cdots + (a_{(t-1)^2} + \cdots + a_{t^2-1}) \\ &= \overbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}^{1 \times 3} + \overbrace{(a_{2^2} + a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}^{2 \times 5} \\ &\quad + \overbrace{(a_{3^2} + \cdots + a_{4^2-1})}^{3 \times 7} + \cdots + \overbrace{(a_{(t-1)^2} + \cdots + a_{t^2-1})}^{(t-1) \times (2t-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{t-1} l(2l+1) = \frac{t(t-1)(2t-1)}{3} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{t(t-1)(4t+1)}{6}}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 6 問

関数 $f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) について

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと, $f(\theta)$ を t で表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(\theta) = 0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。
- (3) $f(\theta) = a$ を満たす θ の値がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

- (1)
 $t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$
 $f(\theta) = t + \sqrt{2}(t^2 - 1) = \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}$ (答)
 また, $t = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ で, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ より, $\underline{\underline{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}}}$ (答)

- (2)
 $f(\theta) = 0$ より, $\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = (\sqrt{2}t - 1)(t + \sqrt{2}) = 0$
 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ より, $t = -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $t = -\sqrt{2}$ のとき, $\sin(\theta + 45^\circ) = -1$ から, $\theta = 225^\circ$
 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\sin(\theta + 45^\circ) = \frac{1}{2}$ から, $\theta = 105^\circ, 345^\circ$
 以上から, 求める θ の値は, $\underline{\underline{\theta = 105^\circ, 225^\circ, 345^\circ}}$ (答)

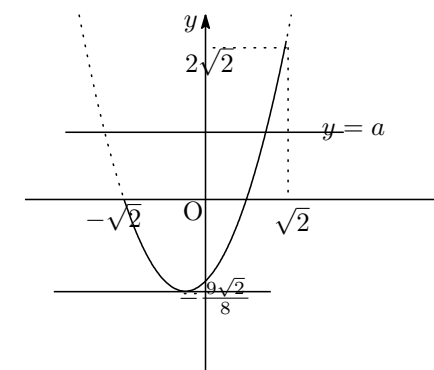
- (3)

グラフは右図のようになり,
 直線 $y = a$ と 1 点を共有すればよい。

(ただし, $t \neq \pm\sqrt{2}$)

よって, 求める a の値の範囲は

$$\therefore a = \underline{\underline{-\frac{9\sqrt{2}}{8}, 0 < a < 2\sqrt{2}}} \quad (\text{答})$$



第 7 問

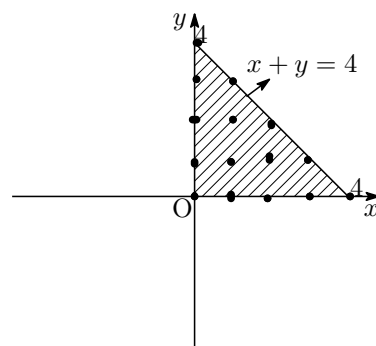
- (1) $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (2) $x + y \leq n, x \geq 0, y \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (3) $x + y + z \leq n, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。(このような点を 格子点 という)

—解答例—

(1)

右図のように、
直線 $y = 0, 1, 2, 3, 4$ 上の
格子点の個数を数えて

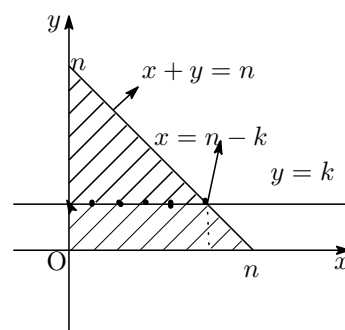
$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \underline{\underline{15 \text{ 個}}} \quad (\text{答})$$



(2)

$y = k$ ($0 \leq k \leq n$) 上には、 $n + 1 - k$ 個の点がある。よって求める点の総数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (n + 1 - k) &= (n + 1) + n + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(3) $z = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) のとき、

(x, y) の組の総数は、(2) から、 $\frac{1}{2}(n - k + 1)(n - k + 2)$

よって求める点の総数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}(n - k + 1)(n - k + 2) &= \frac{1}{2} \left\{ (n + 1)^2(n + 2) - (2n + 3) \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \right\} \\ &= \frac{1}{12}(n + 1)\{6n(n + 1)(n + 2) - 3n(2n + 3) + n(2n + 1)\} \\ &= \frac{1}{12}(n + 1)\{2(n + 2)(n + 3)\} = \underline{\underline{\frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(n + 3)}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 8 問

四角形 ABCD は、 $AD \parallel BC, AB = DC, AC = BD = a$ (a は定数) を満たしているとする。 $\angle ADB = \theta$ とおくと、次の問に答えよ。

- (1) $x = AD, y = BC$ とするとき、 AB の長さを、 a, x, y で表せ。
- (2) 四角形 ABCD の面積 S を a と θ で表せ。
- (3) S の最大値を a で表せ。また、そのときの θ の値を求めよ。

—解答例—

(1)

$AB = CD = p$ とおき、

$\triangle DAB, \triangle CAB$ にそれぞれ余弦定理を適用すると

$$\begin{cases} p^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \theta \cdots \text{①} \\ p^2 = y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta \cdots \text{②} \end{cases}$$

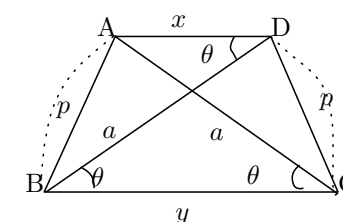
①, ② から、

$$p^2(y - x) = xy(x - y) + a^2(y - x)$$

$x \neq y$ のとき、 $p^2 = a^2 - xy$

$x = y$ のとき、 $\triangle DAB$ において三平方の定理から

$$p^2 = a^2 - x^2 \quad \text{すなわち} \quad p^2 = a^2 - xy \quad \text{したがって、} \therefore \underline{\underline{p = \sqrt{a^2 - xy}}} \quad (\text{答})$$



(2) 台形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(x + y)a \sin \theta \cdots \text{③}$$

① - ② より

$$(x - y)(x + y - 2a \cos \theta) = 0$$

$x \neq y$ のとき、 $x + y = 2a \cos \theta$

$x = y$ のとき、 $\angle DAB = 90^\circ$ より、 $x + y = 2a \cos \theta$

$$\text{したがって、③ から } \underline{\underline{S = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\theta}} \quad (\text{答})$$

(3) S は $\sin 2\theta = 1$ のとき 最大値 $\underline{\underline{\frac{1}{2}a^2}}$ をとり、そのとき、 $\underline{\underline{\theta = 45^\circ}}$ (答)

第 9 問

鋭角三角形 ABC において、点 C から辺 AB に下ろした垂線を CP、点 B から辺 AC に下ろした垂線を BQ とし、CP と BQ の交点を R とする。

$$CR : RP = 3 : 4, \quad BR : RQ = 6 : 1$$

が成り立つとき、BC : CA : AB を求めよ。

—解答例—

図のように a, b, c をとる。

$$\angle A = \angle BRP = \angle CRQ$$

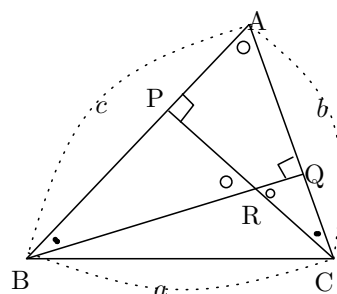
$$CR : RP = 3 : 4, \quad BR : RQ = 6 : 1 \text{ より}$$

$$CR = \frac{3}{7}CP = \frac{3}{7}b \sin A \cdots \textcircled{1}$$

$$RP = \frac{4}{7}CP = \frac{4}{7}b \sin A \cdots \textcircled{2}$$

$$BR = \frac{6}{7}BQ = \frac{6}{7}c \sin A \cdots \textcircled{3}$$

$$RQ = \frac{1}{7}BQ = \frac{1}{7}c \sin A \cdots \textcircled{4}$$



ここで

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{RP}{BR} = \frac{RQ}{CR} \\ &= \frac{2b}{3c} = \frac{c}{3b} \quad (\because \textcircled{1} \sim \textcircled{4}) \quad \therefore c = \sqrt{2}b, \quad \cos A = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

余弦定理から

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + 2b^2 - \frac{4}{3}b^2 = \frac{5}{3}b^2$$

$$\therefore a = BC = \sqrt{\frac{5}{3}}b$$

となる。以上より

$$BC : CA : AB = \sqrt{\frac{5}{3}}b : b : \sqrt{2}b = \sqrt{5} : \sqrt{3} : \sqrt{6} \cdots (\text{答})$$

別解 ベクトルを用いるのも一法。

第 10 問

相異なる 3 つの複素数からなる数の組がある。この 3 つの数から重複を許して 2 個の数を取り出した積は、その 3 数のいずれかになるという。このような 3 数の組をすべて求めよ。

—解答例—

求める複素数の集合を、 $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ とする。

(i) $\alpha\beta\gamma \neq 0$ のとき、

M の要素それぞれに、 $\alpha (\neq 0)$ をかけた数、 $\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma$ は、相異なる 3 数であり、しかも α, β, γ のいずれかである。

$$\therefore M = (\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma)$$

とおける。2 つの等しい集合においては、積が等しいから、

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha^2)(\alpha\beta)(\alpha\gamma)$$

$\alpha\beta\gamma \neq 0$ であるから、 $\alpha^3 = 1$ よって、 $\alpha = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$,

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ のとき, } w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

以下、

$$M = (\alpha, \beta^2, \beta\gamma), \quad M = (\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma^2)$$

としても同様に、 $\beta = 1, \omega, \omega^2, \quad \gamma = 1, \omega, \omega^2$ を得る。

α, β, γ は相異なるから、 $M = (1, \omega, \omega^2)$

(ii) $\alpha\beta\gamma = 0$ のとき、 $\alpha = 0$ として一般性を失わない。

$M = (0, \beta, \gamma)$ とおく。

$\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ で、 $\beta \neq \gamma$

(i) と同様に考えて、 $\beta^2\beta\gamma = \beta\gamma \quad \therefore \beta^2 = 1 \quad \therefore \beta = \pm 1$ また、 $\gamma = \pm 1$

以上より、 $M = (0, 1, -1)$

よって求める 3 数は、

$$(1, \omega, \omega^2), \quad (0, 1, -1) \quad \left(\text{ただし, } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \quad (\text{答})$$

注 このような集合を、群「乗法群」(大学の代数学で学習)という。なお、東工大では「3 つの異なる複素数 (本問)」, 広島大学では「4 つの異なる複素数の組」が出題された。

「広島大の解答」 $\implies (0, 1, \omega, \omega^2), \quad (1, -1, i, -i) \quad (i = \sqrt{-1})$

第 11 問

不等式 $x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + a^2 - 2a < 0$ を満たす整数 x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

$$x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + a^2 - 2a < 0 \iff (x - 1) \{x - (a^2 - 2a)\} < 0$$

ここで,

$$a^2 - 2a - 1 = \{a - (1 - \sqrt{2})\} \{a - (1 + \sqrt{2})\} \quad \text{であるから, この不等式の解は}$$

$$\begin{cases} \text{(i) } a < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} < a \quad \text{のとき, } 1 < x < a^2 - 2a \cdots \text{①} \\ \text{(ii) } 1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2} < a \quad \text{のとき, } a^2 - 2a < x < 1 \cdots \text{②} \\ \text{(iii) } a = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{のとき, 解なし} \cdots \text{③} \end{cases}$$

よってこれらを満たす整数 x が存在しないのは

$$\text{(i) のとき, } a^2 - 2a \leq 2 \iff 1 - \sqrt{3} \leq a \leq 1 + \sqrt{3} \text{ より}$$

$$1 - \sqrt{3} \leq a < 1 - \sqrt{2}, \quad 1 + \sqrt{2} < a \leq 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{(ii) のとき, } a^2 - 2a \geq 0 \iff a(a - 2) \geq 0 \iff a \leq 0, 2 \leq a \text{ より}$$

$$1 - \sqrt{2} < a \leq 0, \quad 2 \leq a < 1 + \sqrt{2}$$

(iii) のとき, 条件を満たす。

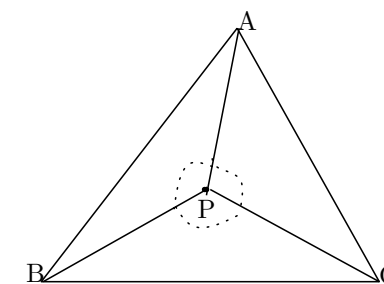
以上から, 求める a の値の範囲は

$$1 - \sqrt{3} \leq a \leq 0, \quad 2 \leq a \leq 1 + \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

第 12 問

三角形の内部の 1 点を P とする。点 P は各辺を直径とする 3 つの円のうち, 少なくとも 2 つに含まれていることを示せ。

—解答例—



$$\text{「P が三角形 ABC の内部」} \iff 0^\circ < \angle APB < 180^\circ, 0^\circ < \angle BPC < 180^\circ, 0^\circ < \angle CPA < 180^\circ$$

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ \text{ であるから}$$

もし点 P が題意の円のうち, 2 つ以上の円の外部にあるとすれば,

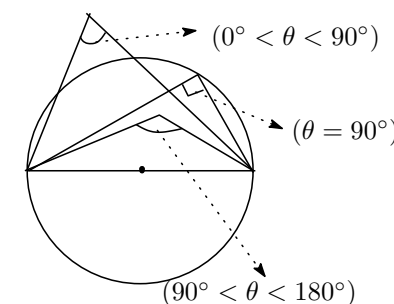
(例えば, AB, BC を直径とする 2 つの円)

$$0^\circ < \angle APB < 90^\circ, \quad 0^\circ < \angle BPC < 90^\circ \text{ から,}$$

$$0^\circ < \angle APB + \angle BPC < 180^\circ \text{ より, } \angle CPA > 180^\circ \text{ となり, 条件に反する。}$$

よって, $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$ のうち, 少なくとも 2 つの角は 90° 以上であり, これらの円に含まれる。

ゆえに, 題意は成立する。(終)



第 13 問

x, y が $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たす実数とするとき、 $(x - y + 1)^2 + (x + 2y + 1)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

—解答例—

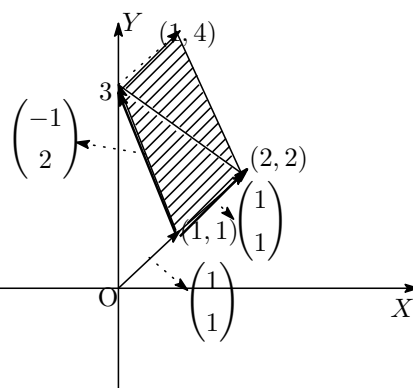
$$\begin{cases} X = x - y + 1 \cdots \cdots ① \\ Y = x + 2y + 1 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

とおくとき、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表され、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ であるから、

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の存在範囲は図の斜線部分である。(境界を含む)



$X^2 + Y^2$ は原点から 図の斜線部分の点 (X, Y) への距離の 2 乗であるから

最大なるのは、 $(X, Y) = (1, 4)$ のときで、最小なるのは、 $(X, Y) = (1, 1)$ のときである。

このときそれぞれ、 $(x, y) = (1, 1), (x, y) = (0, 0)$ である。

$$\begin{cases} \text{最大値 : } 17 & (x, y) = (1, 1) \\ \text{最小値 : } 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{答})$$

【註】(~~~~~) の意味を考えること)

別 解

①, ② から、 $x = \frac{2X + Y - 3}{3}, y = \frac{Y - X}{3}$ と変形して、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq \frac{2X + Y - 3}{3} \leq 1 \iff -2X + 3 \leq Y \leq -2X + 6 \cdots ③ \\ 0 \leq y \leq 1 \iff 0 \leq \frac{Y - X}{3} \leq 1 \iff X \leq Y \leq X + 3 \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ を満たす点 (X, Y) を図示すれば上の図のようになる。

【註】与式を $2x^2 + 5y^2 + 2xy + 4x + 2y + 2 = 2x^2 + 2(y + 2)x + 5y^2 + 2y + 2$

$$= 2 \left(x + \frac{y + 2}{2} \right)^2 + \cdots$$

としても求められる。(範囲の処理が少し煩雑)

第 14 問

p は素数とする。(「素数」とは 1 とその数以外には約数をもたない数のことである。)

(1) k は自然数で $k < p$ であるとき、二項係数 ${}_p C_k$ は p で割り切れることを証明せよ。

(2) $\frac{1}{p}(n + 1)^p - \frac{1}{p}n^p - \frac{1}{p}$ は自然数であることを証明せよ。

(頻出問題)

—解答例—

【証明】

(1)

${}_p C_k$ は異なる p 個から k 個取り出す組合せの数であるから自然数である。

$${}_p C_k = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

ここで p は素数であるから、 $1, p$ 以外には約数を持たない。

$${}_p C_k = p \times \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-k+1)}{k!} \text{ となり、}$$

~~~~~ の部分は  ${}_p C_k$  の意味からして正の整数である。

従って、 ${}_p C_k$  は  $p$  の倍数となり  $p$  で割り切れる。(終)

(2)

$$(n + 1)^p = {}_p C_0 n^p + {}_p C_1 n^{p-1} + {}_p C_2 n^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-1} n + {}_p C_p$$

$$\therefore \frac{1}{p}(n + 1)^p - \frac{1}{p}n^p - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}({}_p C_1 n^{p-1} + {}_p C_2 n^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-1} n)$$

ここで、(1) から、

${}_p C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p-1$ ) は  $p$  で割り切れるので

題意の式は 正の整数 (自然数) である。(終)

# 第 15 問

空間内に 3 点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 3)$  をとる。

- (1) 空間内の点  $P$  が  $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$  を満たしながら動くとき、この点  $P$  はある定点  $Q$  から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1) における定点  $Q$  は 3 点  $A, B, C$  を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1) における  $P$  について、四面体  $ABCP$  の体積の最大値を求めよ。

—解答例—

(1)

与式を変形して

$$\overrightarrow{PA} \cdot \frac{\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{3} = 0$$

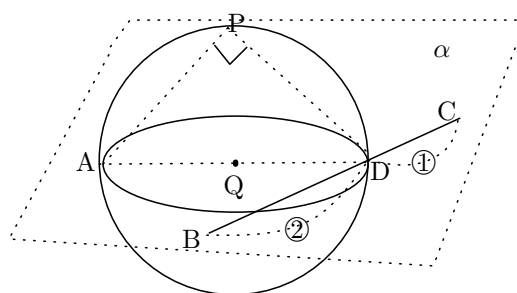
$$\frac{\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{3} = \overrightarrow{PD} \text{ とおくと}$$

点  $D$  は線分  $BC$  を  $2:1$  に内分する点である。

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \text{ より, } \angle APD = 90^\circ$$

よって、点  $P$  は  $AD$  を直径とする球面上にある。(右図)  $AD$  の中点を  $Q$  として、

$QP = \text{一定} \dots\dots$  (終)



(2)

直線  $AD$  と直線  $BC$  は、点  $D$  で交わり、1 つの平面を決定する。

点  $Q$  は線分  $AD$  の中点であるから、この平面上にある。 $\dots\dots$  (終)

- (3)  $\triangle ABC$  を底面とする四面体において、高さが最大になるのは、半径に一致するときである。

$$D\left(0, \frac{2}{3}, 2\right), \therefore \overrightarrow{AD} = \left(-1, \frac{2}{3}, 2\right)$$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$  であるから、

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10 - 1^2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{また, } \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{6}$$

よって、求める体積の最大値は

$$\frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{49}{36} \dots\dots \text{(答)}$$

# 第 16 問

$n$  を 2 以上の正の整数として

$$f(n) = \sqrt{n^2 + 3n + 5}$$

とおく。このとき、以下の問に答えよ。

- (1)  $f(n)$  の整数部分  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (2)  $f(n)$  の小数第一位の数が 5 となるような  $n$  の値の最小値を求めよ。

—解答例—

$$(1) \quad n^2 + 3n + 5 = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 > (n+1)^2 \text{ より,}$$

$f(n) > n+1$  は類推できる。

いま、

$$n^2 + 3n + 5 - (n+1)^2 = n+4 > 0$$

$$n^2 + 3n + 5 - (n+2)^2 = -n+1 < 0 \quad (\because n \geq 2)$$

$$\therefore n+1 < f(n) < n+2 \text{ より,}$$

$$a_n = n+1 \dots\dots \text{(答)}$$

(2)

条件と (1) から

$$\frac{5}{10} \leq f(n) - a_n < \frac{6}{10} \text{ とおける.}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \sqrt{n^2 + 3n + 5} - (n+1) < \frac{3}{5}$$

$$\iff n + \frac{3}{2} \leq \sqrt{n^2 + 3n + 5} < n + \frac{8}{5}$$

$$\iff \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 \leq n^2 + 3n + 5 < \left(n + \frac{8}{5}\right)^2$$

$$\iff n > \frac{61}{5} \quad \therefore n \geq 13$$

よって、求める  $n$  の最小値は、 $n = 13 \dots\dots$  (答)

**註** (1) では、 $f(2) = \sqrt{2^2 + 3 \cdot 2 + 5} = \sqrt{15} \quad \therefore a_2 = 3$

$$f(3) = \sqrt{3^2 + 3 \cdot 3 + 5} = \sqrt{23}, \quad \therefore a_3 = 4$$

以下、 $a_4 = 5, a_5 = 6, \dots$  から、 $a_n = n+1$  と類推できる。

## 第 17 問

三つの角  $\alpha, \beta, \gamma$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$  が

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

を満たすとき、 $\alpha + \beta + \gamma$  の値をすべて求めよ。

—解答例—

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ より,} \\ \cos \alpha > 0, \quad \cos \beta > 0, \quad \cos \gamma > 0 \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \\ \iff \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \iff \sin \alpha (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) + \cos \alpha (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) &= 0 \\ \iff \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha \sin(\beta + \gamma) &= 0 \\ \iff \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } -\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ であるから} \\ -\frac{3}{2}\pi < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

よって、これを満たす  $\alpha + \beta + \gamma$  の値をすべて求めると

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\pi, \quad 0, \quad \pi \text{ (答)}$$

——— 三角形 (美しい式) ———

三角形 ABC において

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

が成り立つ。(上記の変形で証明)

## 第 18 問

自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $(2 - \sqrt{3})^n$  という数を考える。これらの数はいずれも、それぞれ適当な自然数  $m$  が存在して  $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$  という形で表されることを示せ。

(有名問題)

—解答例—

(実験)

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^1 &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^2 &= 7 - 4\sqrt{3} = \sqrt{49} - \sqrt{48} \\ (2 - \sqrt{3})^3 &= 26 - 15\sqrt{3} = \sqrt{676} - \sqrt{675} \end{aligned}$$

などから、 $(2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \sqrt{3}$  ( $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ )  $\cdots$  ① と表され、それを

$$(2 - \sqrt{3})^n = \sqrt{a_n^2} - \sqrt{3b_n^2} \cdots \cdots \text{②}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^{n+1} &= (2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n \\ &= (2 - \sqrt{3})(a_n - b_n \sqrt{3}) \\ &= (2a_n + 3b_n) - (a_n + 2b_n) \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \cdots \cdots \text{③} \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \cdots \cdots \text{④} \\ a_1 = 2, \quad b_1 = 1 \cdots \cdots \text{⑤} \end{cases} \quad \text{で定義するとき,}$$

③ ～④ から、

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \cdots \cdots \text{⑥}$$

なることを証明すればよい。

$n = 1$  のとき、 $a_1^2 - 3b_1^2 = 1$  で成立。

$n = k$  ( $k \geq 1$ ) で⑥ が成り立つと仮定して

$n = k + 1$  のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1}^2 - 3b_{k+1}^2 &= (2a_k + 3b_k)^2 - 3(a_k + 2b_k)^2 \\ &= a_k^2 - 3b_k^2 = 1 \quad \text{となり} \\ n = k + 1 \text{ のときも成り立つことを示している。} \end{aligned}$$

以上により、⑥ は証明された。

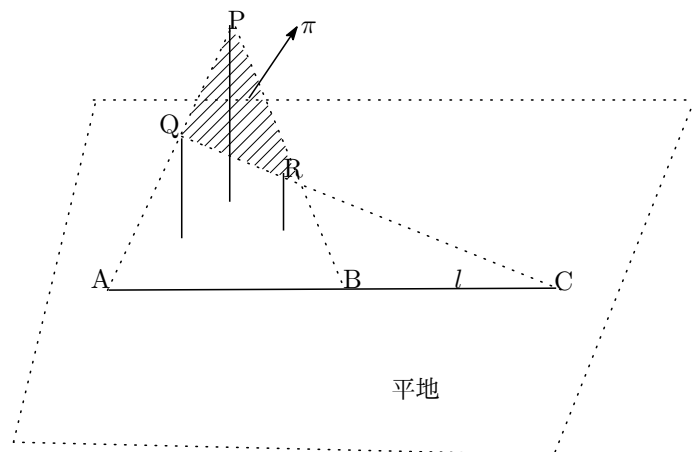
よって、題意は示された。(終)

## 第 19 問

平地に 3 本のテレビ塔が立っている。異なる 3 つの地点 A,B,C に立ってそれらを眺めたところ、それぞれの地点で 3 本のうちの 2 本の先端が重なって見えたという。そのとき、3 つの地点 A,B,C は一直線上にあることを証明せよ。ただし、人の目の高さは無視するものとする。(類: 京都大)

—解答例—

証明



3 本のテレビ塔の先端を、P,Q,R とする。

直線 PQ, PR, QR の延長線が異なる 3 地点で平地と交わることから、P, Q, R は同一直線上にはなく、三角形をつくり、平面 PQR を決定する。それを  $\pi$  とする。

平面  $\pi$  と平地との交線を  $l$  とすると、3 点 A,B,C はその交線上の点である。

よって、題意は成り立つ。(終)

— 平面の決定条件 (空間図形を考えると重要であるので押さえておきたい) —

次の各条件は、それぞれ平面の決定条件であり、同値である。

- ① 同一直線上にない 3 点 (三角形ができる)
- ② 交わる 2 直線
- ③ 平行な 2 直線
- ④ 1 点とその点を通らない直線

## 第 20 問

正四面体の各頂点を  $A_1, A_2, A_3, A_4$  とする。ある頂点にいる動点 X は、同じ頂点にとどまることなく、1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が  $A_i$  に  $n$  秒後に存在する確率を  $P_i(n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で表す。

$$P_1(0) = \frac{1}{4}, P_2(0) = \frac{1}{2}, P_3(0) = \frac{1}{8}, P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とすると、

(1)  $P_1(n)$  を求めよ。

(2)  $P_2(n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を求めよ。

(類: 東京大)

—解答例—

(1)

$n$  回の試行の後、点 X が  $A_1$  にいるのは、 $n - 1$  回の試行の後  $A_2, A_3, A_4$  にいる場合しかなく

$$P_1(n) = \frac{1}{3} P_2(n-1) + \frac{1}{3} P_3(n-1) + \frac{1}{3} P_4(n-1) \text{ であるから,}$$

$$P_1(n) = \frac{1}{3} \left\{ 1 - P_1(n-1) \right\} \quad (\because P_1(n-1) + P_2(n-1) + P_3(n-1) + P_4(n-1) = 1)$$

$$\therefore P_1(n) - \frac{1}{4} = \left( -\frac{1}{3} \right) \left\{ P_1(n-1) - \frac{1}{4} \right\} = \left( -\frac{1}{3} \right)^2 \left\{ P_1(n-2) - \frac{1}{4} \right\}$$

$\vdots$

$$= \left( -\frac{1}{3} \right)^n \left\{ P_1(0) - \frac{1}{4} \right\} = 0 \quad \left( \because P_1(0) = \frac{1}{4} \right)$$

$$\therefore P_1(n) = \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

(2)

同様に变形して

$$P_2(n) - \frac{1}{4} = \left( -\frac{1}{3} \right)^n \left\{ P_2(0) - \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \quad \left( \because P_2(0) = \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore P_2(n) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad (\text{答})$$

## 第 21 問

どのような負でない 2 つの整数  $m, n$  をもちいても

$$x = 3m + 5n$$

とは表すことができない正の整数  $x$  をすべて求めよ.

(阪大 理系)

—解答例—

図表を書いて調べてみよう.

| $n \setminus m$ | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | ...      |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0               | 0        | 3        | 6        | 9        | 12       | 15       | ...      |
| 1               | 5        | 8        | 11       | 14       | 17       | 20       | ...      |
| 2               | 10       | 13       | 16       | 19       | 22       | 25       | ...      |
| 3               | 15       | 18       | 21       | 24       | 27       | 30       | ...      |
| 4               | 20       | 23       | 26       | 29       | 32       | 35       | ...      |
| 5               | 25       | 28       | 31       | 34       | 37       | 40       | ...      |
| $\vdots$        | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

1, 2, 4, 7 は現れず, 8 以上の整数は現れる ..... (★)

と予想できる.

$n = 0$  の行は

$$3m : 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots$$

で 0 以上の 3 の倍数がすべて現れる.

$n = 1$  の行は

$$3m + 5 : 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$$

で 5 以上の 3 で割って 2 余る整数はすべて現れる.

$n = 2$  の行は

$$3m + 10 : 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots$$

で 10 以上の 3 で割って 1 余る整数はすべて現れる.

$n = 3$  の行は

$$3m + 15 : 15, 18, 21, \dots$$

でこれらは  $n = 0$  の行にすでに現れている.

一般に,  $n = 3k + r$  ( $r = 0, 1, 2$ ) は  $x = 3m + 5(3k + r) = 3(m + 5k) + 5r$  で  $n = r$  の行に現れている.

したがって,  $n = 0, 1, 2$  の 3 行を調べればよい.

$$\begin{cases} n = 0 & \text{のとき, ..... なし} \\ n = 1 & \text{のとき, ..... 2} \\ n = 2 & \text{のとき, ..... 1, 4, 7} \end{cases} \quad \text{以上から求める } x \text{ は, } x = \underline{1, 2, 4, 7} \quad (\text{答})$$

テーマ  $\Rightarrow$  「実験から一般化へ」

ただし,  $m, n$  がすべての整数 であれば,  $3m + 5n$  は, どんな整数でも表すことができる.

## 第 22 問

実数  $a, b$  について小さくない方を  $\max\{a, b\}$  で表すものとする. いま  $xy$  平面において

$$1 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 2$$

を満たす点  $(x, y)$  全体からなる領域を  $D$  とする.  $D$  において  $4x^2 - 4x + y^2$  のとる値の最大値と最小値を求めよ.

—解答例—

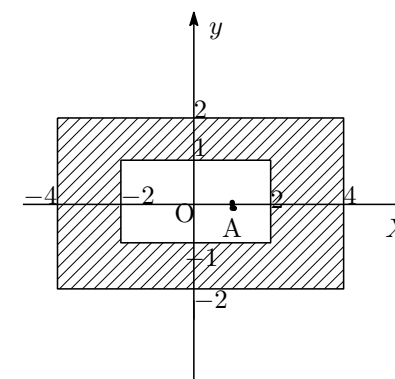
$$1 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 2$$

$$\iff (|x| \geq 1, \text{ または, } |y| \geq 1) \text{ かつ } (|x| \leq 2, \text{ または, } |y| \leq 2)$$

であり,  $2x = X$  とおくと,  $4x^2 - 4x + y^2 = (2x - 1)^2 + y^2 - 1 = \underbrace{(X - 1)^2 + y^2 - 1}_{\dots} \dots \textcircled{1}$

$$(|X| \geq 2, \text{ または, } |y| \geq 1) \text{ かつ } (|X| \leq 4, \text{ または, } |y| \leq 2) \dots \textcircled{2}$$

② を 満たす点  $(X, y)$  の存在する範囲を図示すると, 下図の斜線部分である. (境界を含む)



① の の部分は点 A(1, 0) と図の領域  $D$  の点との距離の平方である.

$(X, y) = (-4, \pm 2)$  のとき最大になる. 最大値は, 28

$(X, y) = (2, 0), (1, \pm 1)$  のとき最小になる. 最小値 0

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{最大値 : } 28, & (x, y) = (-2, \pm 2) \\ \text{最小値 : } 0, & (x, y) = (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm 1\right) \end{cases}$$

## 第 23 問

自然数  $n, p$  に対して,  $n^p$  の一位の数を  $f_p(n)$  で表す. 例えば,  $f_2(3) = 9, f_4(5) = 5$  などである.

- (1)  $n$  がすべての自然数をとるとき,  $f_2(n)$  の値をすべて求めよ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して,  $f_5(n) = f_1(n)$  となることを証明せよ.
- (3)  $n$  がすべての自然数をとるとき,  $f_{100}(n)$  の値をすべて求めよ.

—解答例—

$n = 10k + r$  とおく.  $k, r$  は整数で,  $r = 0, 1, 2, \dots, 9$

- (1)  $n^p = (10k + r)^p = 10 \times (\text{整数}) + r^p$   
 $f_2(n)$  の集合は,

$$\{f_2(0), f_2(1), f_2(2), \dots, f_2(9)\} = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\} \quad (\text{答})$$

- (2)  $f_5(n) = f_1(n) \iff n^5 - n$  は 10 の倍数であることを示す.

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) \\ &= n(n-1)(n+1)\{(n^2 - 4) + 5\} \\ &= \underbrace{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)} + 5n(n-1)(n+1) \dots \dots (\star) \end{aligned}$$

~~~~~ の部分は, 連続する 5 整数の積であるから, 5 の倍数であり, かつ 2 の倍数である.

ゆえに $2 \times 5 = 10$ の倍数である. また, $5n(n-1)(n+1)$ は 10 の倍数である.

以上より $(\star)$ は 10 の倍数 $\iff$ すべての自然数 n に対して, $f_5(n) = f_1(n)$ (終)

- (3) $f_{100}(n) = f_5(n^{20}) = f_1(n^{20}) = f_5(n^4) = f_4(n) \quad (\because (2))$

(1) より, $f_2(n) = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ であるから,

$$f_{100}(n) = f_4(n) = f_2(n^2) = \{0, 1, 5, 6\} \quad (\text{答})$$

註

自然数 a を 10 で割った余り (一の位) を, r とするとき, $a \equiv r \pmod{10}$ と表す.
 これを合同式ごうどうしきという.

$$n \equiv 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \pmod{10}$$

$$n^2 \equiv 0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 6 \ 5 \ 6 \ 9 \ 4 \ 1 \pmod{10} \leftarrow (1) \text{ の答}$$

$$n^4 \equiv 0 \ 1 \ 6 \ 1 \ 6 \ 5 \ 6 \ 1 \ 6 \ 1 \pmod{10} \leftarrow (3) \text{ の答}$$

$$n^5 \equiv 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \pmod{10}$$

$$n^5 - n \equiv 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \pmod{10} \leftarrow (2) \text{ の答}$$

$$\therefore n^{100} = \{(n^5)^5\}^4 \equiv (n^5)^4 \equiv n^4 \pmod{10} \rightarrow (3) \text{ の答} \quad \{0, 1, 5, 6\}$$

第 24 問

平面上の 2 点 $P(t, 0), Q(0, 1)$ に対して, P を通り, PQ に垂直な直線を ℓ とする. t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき, ℓ が通る領域を求めて, 平面上に図示せよ.

—解答例—

$$\ell: y = t(x - t) \text{ より, } t^2 - xt + y = 0 \dots \textcircled{1}$$

① の左辺を $f(t)$ とおくと

$f(t) = t^2 - xt + y$ で, ① を満たす t が, $-1 \leq t \leq 1$ に少なくとも一つ存在すればよい.

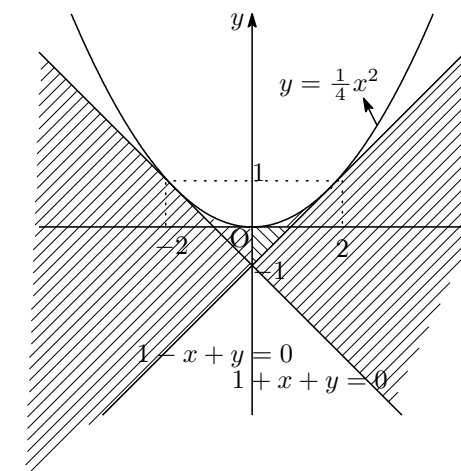
- (i) 2 つの t が存在するとき,

$$\begin{cases} D \geq 0 \text{ より, } x^2 - 4y \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{4}x^2 \dots \textcircled{2} \\ -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \text{ より, } -2 \leq x \leq 2 \dots \textcircled{3} \\ f(-1) \geq 0, \quad f(1) \geq 0 \text{ より, } 1 + x + y \geq 0, \quad 1 - x + y \geq 0 \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

(i) 1 つの t が存在するとき, (± 1 のときも含む)

$$f(-1) \cdot f(1) \leq 0 \iff (1 + x + y)(1 - x + y) \leq 0 \dots \textcircled{5}$$

② ~⑤ より, 直線 ℓ の存在する領域は下図である.



図の斜線部分で境界を含む (答)

註

$l: y = tx - t^2$ は放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の点 $(2t, t^2)$ における接線であるから,
 $-1 \leq t \leq 1$ のとき, 上図のようになることは類推できる.

第 25 問

5 個の正の整数があるとき、これらの中から和が 3 の倍数となるような 3 個の整数を取り出すことができることを示せ。

—解答例—

5 個の整数を 3 で割ったときの余りが 0, 1, 2 であるものの集合をそれぞれ, A_0, A_1, A_2 とするとき, 次の 2 つの場合が考えられる.

- (i) A_0, A_1, A_2 のいずれも空集合でないとき.
- (ii) A_0, A_1, A_2 のいずれかが空集合のとき.

(i) のとき,

A_0, A_1, A_2 からそれぞれ 1 個ずつの数 a, b, c を取り出すと

$$a = 3i, b = 3j + 1, c = 3k + 2 \quad (i, j, k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表されるから

$$a + b + c = 3(i + j + k + 1) \in A_0$$

と表され, 3 つの数の和は 3 の倍数である.

(ii) のとき,

A_0, A_1, A_2 のいずれかが空集合のとき, 5 個の数は残りの 2 つの集合に含まれるから, 3 個以上の数が属する集合が 1 つできる。その集合から 3 個の数 a, b, c を取り出して, 和を 3 の倍数とすることができる。実際,

① $a, b, c \in A_0$ のとき,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3l + 3m + 3n \\ &= 3(l + m + n) \in A_0 \end{aligned}$$

② $a, b, c \in A_1$ のとき,

$$\begin{aligned} a + b + c &= (3l + 1) + (3m + 1) + (3n + 1) \\ &= 3(l + m + n + 1) \in A_0 \end{aligned}$$

③ $a, b, c \in A_2$ のとき,

$$\begin{aligned} a + b + c &= (3l + 2) + (3m + 2) + (3n + 2) \\ &= 3(l + m + n + 2) \in A_0 \quad (l, m, n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \end{aligned}$$

よって, 題意は示された。(終)

第 26 問

半径 1 の円に内接する正十角形 ABCDEFGHIJ において, 2 線分の積 $AB \cdot AD$ の値を求めよ。

—解答例—

円の中心を O として, $\angle AOB = 36^\circ = \theta$ とおく.

$$\angle AOD = 3\theta$$

であるから,

$$AB = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad AD = 2 \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$\therefore AB \cdot AD = 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$= 2(\cos \theta - \cos 2\theta) \cdots \textcircled{2}$$

$$= 2(-2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1) \cdots \textcircled{3}$$

である. $5\theta = 180^\circ$ であるから

$$\sin 2\theta = \sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\sin \theta > 0 \text{ より,}$$

$$2 \cos \theta = 3 - 4 \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta - 1$$

$$\therefore 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

③, ④ より

$$AB \cdot AD = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1 \cdots \cdots (\text{答})$$

(別解)

$\angle AOB = \theta$ とおくと,

円周角・中心角の関係から

$$\angle BAD = \angle DAO = \theta$$

ここで,

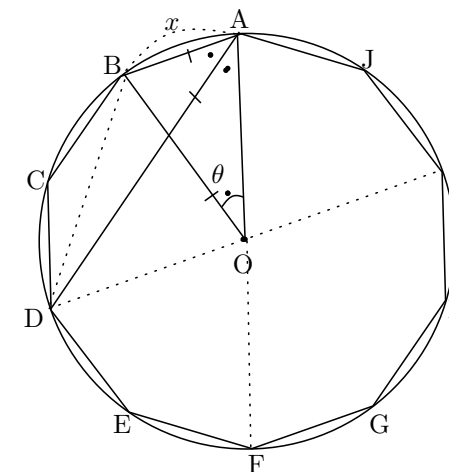
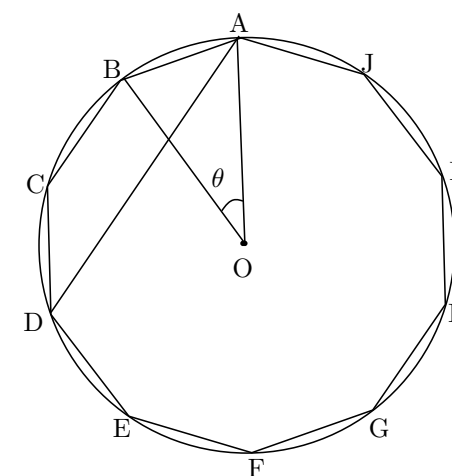
$$\triangle ABO = \triangle ABD$$

であることから

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \theta$$

であるから

$$AB \cdot AD = 1 (\text{答})$$



第 27 問

n を自然数とする。次の 3 つの不等式 (1), (2), (3) のすべてを満たす自然数の組 (a, b, c, d) はいくつあるか。 n を用いて表せ。

$$(1) \ 1 \leq a < d \leq n \quad (2) \ a \leq b < d \quad (3) \ a < c \leq d$$

—解答例—

(1), (2), (3) の 3 条件から次の 6 つの場合が考えられる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & a < b < c < d \quad \textcircled{2} \quad a < c < b < d \quad \textcircled{3} \quad a = b < c < d \\ \textcircled{4} \quad & a < b = c < d \quad \textcircled{5} \quad a < b < c = d \quad \textcircled{6} \quad a = b < c = d \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の場合は, いずれも } {}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \quad (n \geq 4) \text{ 通り。}$$

$$\textcircled{3} \sim \textcircled{5} \text{ の場合は, いずれも } {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad (n \geq 3) \text{ 通り。}$$

$$\textcircled{6} \text{ の場合は, } {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!} \quad (n \geq 2) \text{ 通り。}$$

$$\begin{aligned} & \text{よって, 求める自然数の組 } (a, b, c, d) \text{ の数は} \\ & 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)\{(n-2)(n-3) + 6(n-2) + 6\}}{12} \\ &= \frac{n(n-1)(n^2+n)}{12} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \\ & \text{(これは } n=1 \text{ のときも成立している) (答)} \end{aligned}$$

別解

$d-a=k$ とおくと, $k=1, 2, \dots, n-1$ が対応し, それぞれに対して b, c はいずれも k 通りある。よって求める自然数の組 (a, b, c, d) の数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k^2 &= n \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n-1)\{4n-2-3n+3\}}{12} \\ &= \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \end{aligned}$$

第 28 問

時計の 3 つの針 (時針, 分針, 秒針) は, 12 時 (零時) に重なるが, 3 針が重なるのはそのとき以外にはない。このことを証明しなさい。

—解答例—

解答

時針 (短針) が 30° 回転するとき, 分針 (長針) は, 360° 回転し, 秒針は, 21600° 回転する。

従って時針が x 回転するとき, 分針, 秒針はそれぞれ $12x$, $720x$ 回転する。

この時刻に 3 つの針が重なるための条件は

$$12x - x = 11x, \quad 720x - x = 719x \text{ がともに整数であること} \cdots \textcircled{1}$$

である。 $11x = n$ (n は整数) とおくと, $x = \frac{n}{11}$ より

$$719x = \frac{719}{11}n \text{ が整数であること} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が条件である。 719 と 11 は互いに素であるから $\textcircled{2} \iff n$ が 11 の倍数であること $\iff x$ が整数。

よって, 3 つの針が重なるのは, 時針が 12 時からちょうど整数回転したときに限る。

すなわち, 12 時 (零時) 以外にはない。(終)

別解

x 時間後の回転角を考える。 Z を整数の集合とする。

$$\text{時針と分針が重なる} \iff 360x - 30x = 360m \ (m \in Z) \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{時針と秒針が重なる} \iff 21600x - 30x = 360n \ (n \in Z) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } x = \frac{12}{11}m \cdots \cdots (\star)$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } x = \frac{36}{2157}n = \frac{12}{719}n$$

$$\therefore \frac{12}{11}m = \frac{12}{719}n \iff n = \frac{719}{11}m$$

ここで 719 と 11 は互いに素であるから, m は 11 の倍数でなければならない。

このとき, $(\star)$ より x は 12 の倍数となる。よって, 題意が成立。(終)

註

3 つの針を同時に考えると混乱する。2 つずつの組合せを考えることがポイント。

第 29 問

二等辺三角形 ABC において、辺の長さは $BC = a$, $AB = AC = 4a$ であるとする。底辺 BC の延長上に $BC = CD$ である点 D をとり、直線 AD と $\angle B$ の 2 等分線との交点を E とするとき、線分 BE の長さを求めよ。

—解答例—

右のような図形に対して

A, E から BC へ垂線 AH, EP を下ろす。

$$BH = CH = \frac{a}{2}$$

$\angle B$ の二等分線は AD を 2 : 1 に内分するから

$$AE : ED = 2 : 1 \quad \therefore AD : ED = 3 : 1$$

$$\text{また, } AH = \sqrt{16a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}a$$

$$AH : EP = 3 : 1 \text{ より, } EP = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$PD = \frac{3}{2}a \times \frac{1}{3} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore BP = \frac{3}{2}a, \quad \therefore BE = \sqrt{BP^2 + EP^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{7}{4}a^2} = 2a \text{ (答)}$$

別解

$\triangle ABD$ において中線定理から

$$AB^2 + AD^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$

$$\therefore 2AD^2 = 2(16a^2 + a^2) - 16a^2$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{2}a$$

ここで、 $AE \cdot ED = 2 : 1$ であるから

$$AE = 2\sqrt{2}a, \quad ED = \sqrt{2}a$$

$\triangle BAG \sim \triangle BED$ であるから

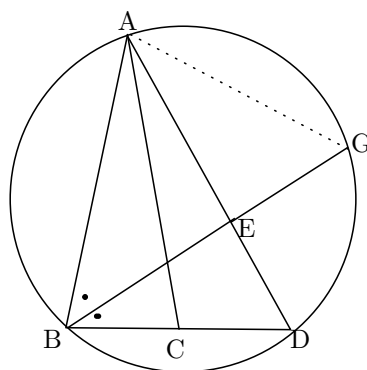
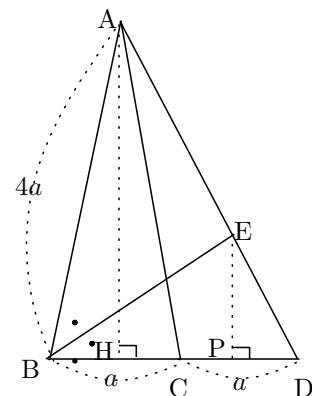
$$BA : BE = BG : BD \quad \therefore BE \cdot BG = 8a^2$$

$$\therefore BE(BE + EG) = BE^2 + BE \cdot EG = 8a^2$$

ここで、方べきの定理から

$$BE \cdot EG = AE \cdot ED = 4a^2 \text{ だから}$$

$$BE^2 = 8a^2 - 4a^2 = 4a^2, \quad \therefore BE = 2a \text{ (答)}$$



第 30 問

平面上のどの 3 本の直線も 1 点を共有しない、 n 本の直線がある。

- (1) どの 2 本の直線も平行でないとき、平面が n 本の直線によって分けられる部分の個数 a_n を n で表せ。
- (2) n 本の直線のうち 2 本だけ平行なものがある。平面が n 本の直線によって分けられる部分の個数 b_n を n で表せ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

—解答例—

- (1) まず、 $a_1 = 2$ である。

n 本の直線によって分けられる部分の個数 a_n において、 $n + 1$ 本目の直線を引くと、新しく n の交点ができる。

よって、新しくできる平面の個数も $n + 1$ 個であるから

$$a_{n+1} = a_n + (n + 1)$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1) = 2 + \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$n = 1 \text{ のときも満たす。} \quad \therefore a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} \text{ (答)}$$

- (2) 互いに平行でない $n - 1$ 本の直線を考えると、(1) から a_{n-1} 個の平面ができる。

そのうちのある 1 本の直線に平行な n 番目の直線を引くと、交点の数は $n - 2$ 個生まれ、枝の数は $n - 1$ 本増える。

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$b_n = a_{n-1} + (n - 1) = \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\therefore b_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geq 2) \text{ (答)}$$

第 31 問

30 の階乗 $30!$ について

- (1) $30!$ が 2^k で割り切れるような最大の自然数 k を求めよ。
- (2) $30!$ の 1 の位は 0 である。ここから始めて十の位, 百の位と順に左に見ていく。
最初に 0 でない数字が現れるまでに, 連続していくつの 0 が並ぶか。
- (3) (2) において, 最初に現れる 0 でない数字を求めよ。

—解答例—

- (1)
- (i) $2^1 \times (\text{奇数}) \cdots 8$ 個 (ii) $2^2 \times (\text{奇数}) \cdots 4$ 個
(iii) $2^3 \times (\text{奇数}) \cdots 2$ 個 (iv) $2^4 \times (\text{奇数}) \cdots 1$ 個
よって, 2 の累乗は $2^{8+8+6+4} = 2^{26}$ となり
題意を満たす最大の自然数 $k = \mathbf{26}$ (答)
- (2)
- 1~30 までの数のなかで素数は,
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 で 1~30 までの各数を素因数分解すると
- $$30! = (2 \cdot 3 \cdot 5)(2^2 \cdot 7)(3^3)(2 \cdot 13)(5^2)(2^3 \cdot 3)(2 \cdot 11)(3 \cdot 7)(2^2 \cdot 5)(2 \cdot 3^2)(2^4)(3 \cdot 5)(2 \cdot 7)(2^2 \cdot 3) \\ \cdot (2 \cdot 5)(3^2)(2^3)(2 \cdot 3)(2^2) \cdot 29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$
- となり, $30! = 2^{26} \times 3^{14} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$
ここで, $2 \times 5 = 10$ は, 最大 7 個あるから, **0 は連続して 7 個並ぶ** (答)
- (3)
- 一般に自然数 n の一の位の数を $f(n)$ で表すとする。
求めるのは
 $f\{2^{19} \times 3^{14} \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29\}$ である。
 $f(2^{19}) = f(2^{10}) \times f(2^9) = f(4) \times f(2) = 8$
 $f(3^{14}) = f(3^5) \times f(3^5) \times f(3^4) = 9$
同様にして
 $f(7^4) = 1, \quad f(11^2) = 1, \quad f(13^2) = 9, \quad f(17 \times 19 \times 23 \times 29) = 1$
よって求める数字は
 $f(8 \times 9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 1) = \mathbf{8}$ (答)

第 32 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

—解答例—

$$f(x) = 3x^3 - 3 \left(a - \frac{1}{a} \right) x^2 - 4x + 4 \left(a - \frac{1}{a} \right) \text{ であるから}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 6 \left(a - \frac{1}{a} \right) x - 4 = (3x - 2a) \left(3x + \frac{2}{a} \right)$$

(i) $a > 0$ のとき

| | | | | | |
|---------|------------|-----------------|------------|----------------|------------|
| x | $\cdots$ | $-\frac{2}{3a}$ | $\cdots$ | $\frac{2a}{3}$ | $\cdots$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

(ii) $a < 0$ のとき

| | | | | | |
|---------|------------|----------------|------------|-----------------|------------|
| x | $\cdots$ | $\frac{2a}{3}$ | $\cdots$ | $-\frac{2}{3a}$ | $\cdots$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

いずれにしても極大値と極小値をもち, その差は

$$\left| f \left(\frac{2a}{3} \right) - f \left(-\frac{2}{3a} \right) \right|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \left\{ 3 \left(\frac{2a}{3} \right)^2 - 4 \right\} \left(\frac{2a}{3} - a + \frac{1}{a} \right) - \left\{ 3 \left(-\frac{2}{3a} \right)^2 - 4 \right\} \left(-\frac{2}{3a} - a + \frac{1}{a} \right) \right| \\ &= \frac{4}{9} \left| a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} \right| \\ &= \frac{4}{9} \left| a + \frac{1}{a} \right|^3 = \frac{4}{9} \left\{ |a| + \frac{1}{|a|} \right\}^3 \quad \left(\because a, \frac{1}{a} \text{ は同符号} \right) \\ &\geq \frac{4}{9} \left\{ 2\sqrt{|a| \cdot \frac{1}{|a|}} \right\}^3 \quad \left(\because |a|, \frac{1}{|a|} > 0 \text{ で相加相乗の関係から} \right) \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

等号が成立するとき, $|a| = \frac{1}{|a|}$ のとき, $a^2 = 1$ より, $a = \pm 1$ (答)

第 33 問

xy 平面上で、次の条件を満たす点 (x, y) の範囲を D とする。

$$\log_2 x \leq 2 + \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2 (4 - 2x)$$

- (1) D を xy 平面上に図示せよ。
- (2) $s < 1$ のとき、 $y - sx$ の D 上での最大値 $f(s)$ を求め、関数 $t = f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ。

—解答例—

(1)

真数条件から、 $x > 0, y > 0, 4 - 2x > 0$

$$\therefore 0 < x < 2, y > 0 \cdots \textcircled{1}$$

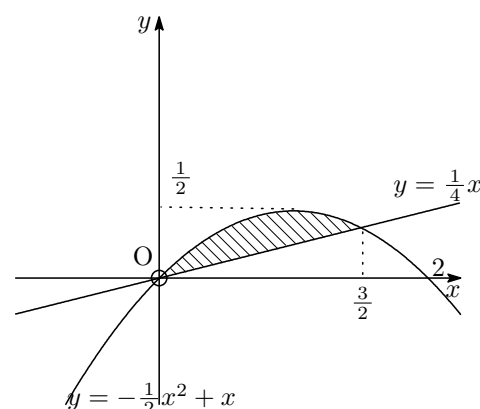
与式を変形して、

$$\log_2 x \leq \log_2 4y \leq \log_2 x + \log_2 (4 - 2x)$$

底 $2 > 1$ であるから

$$x \leq 4y \leq x(4 - 2x)$$

$$\therefore y \geq \frac{1}{4}x, y \leq -\frac{1}{2}x^2 + x \cdots \textcircled{2}$$



求める領域は図の斜線部分で境界を含む。(○は含まず) (答)

(2)

$$y - sx = k \text{ とおくと, } y = sx + k$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \text{ と, } y = sx + k \text{ が接する場合を求める。}$$

原点 $(0, 0)$ と点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{8})$ における接線の傾きは $1, -\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x = sx + k \text{ から, } x^2 + 2(s-1)x + 2k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 0 \text{ より, } (s-1)^2 - 2k = 0 \text{ から, } k = \frac{1}{2}(s-1)^2$$

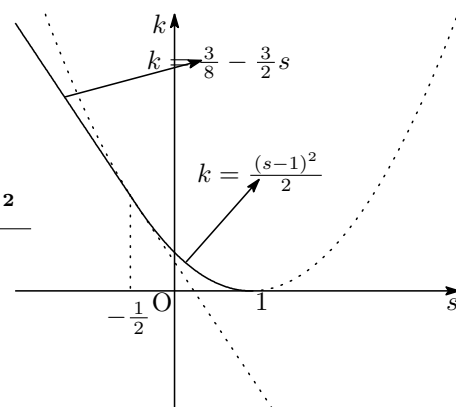
よって、 $-\frac{1}{2} < s \leq 1$ のときは、接する場合が k は最大となる。

$s \leq -\frac{1}{2}$ のとき、点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{8})$ を通るときが最大である。

以上から、求める k の最大値は

$$\begin{cases} \text{(i) } s \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき, } k = \frac{3}{8} - \frac{3}{2}s \\ \text{(ii) } -\frac{1}{2} < s < 1 \text{ のとき, } k = \frac{(s-1)^2}{2} \end{cases}$$

図の実線部分 (答)



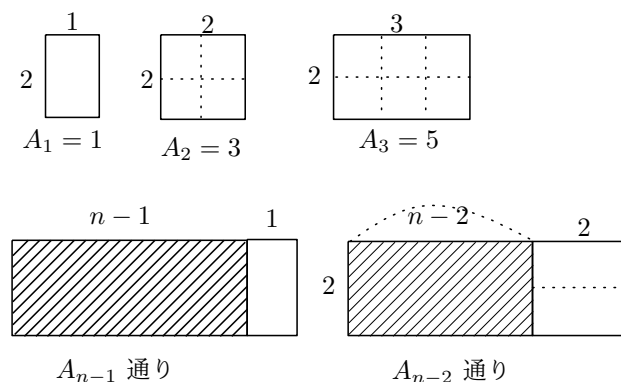
第 34 問

二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある。縦 2, 横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような総数を A_n で表す。ただし、 n は正の整数である。

たとえば $A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 5$ である。このとき以下の間に答えよ。

- (1) $n \geq 3$ のとき、 A_n を A_{n-1}, A_{n-2} を用いて表せ。
- (2) A_n を n で表せ。

—解答例—



(1)

図のようなタイルの敷き方を考えて

左図の場合は 1 通り、右図の場合は 2 通りあるから、

$$A_n = 1 \cdot A_{n-1} + 2 \cdot A_{n-2}$$

$$\therefore n \geq 3 \text{ のとき, } A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} \text{ (答)}$$

(2)

(1) の漸化式を変形して

$$\begin{cases} A_n - 2A_{n-1} = -(A_{n-1} - 2A_{n-2}) \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A_n + A_{n-1} = 2(A_{n-1} + A_{n-2}) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } A_n - 2A_{n-1} = (-1)^{n-2}(A_2 - 2A_1) = (-1)^{n-2} \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } A_n + A_{n-1} = 2^{n-2}(A_2 + A_1) = 2^n \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から, } A_{n-1} \text{ を消去して,}$$

$$3A_n = 2^{n+1} + (-1)^{n-2}$$

$$\therefore A_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-2}}{3} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ (答)}$$

第 35 問

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ がすべて整数であるとき

$$S = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_n - x_1|$$

は偶数であることを示せ。

(新作問題)

—解答例—

解 1

一般に, 整数 a を整数 b で割った余りが r ($r = 0, 1, 2, \dots, b-1$) のとき

$$a \equiv r \pmod{b} \quad \text{と表すとする.これを 合同式 という}$$

$$\text{一般に, } |x| - x = 0, -2x \text{ であるから, } |x| \equiv x \pmod{2}$$

$$\therefore |x_i - x_j| \equiv x_i - x_j \pmod{2}$$

$$\therefore |x_1 - x_2| \equiv x_1 - x_2, \quad |x_2 - x_3| \equiv x_2 - x_3, \dots, |x_n - x_1| \equiv x_n - x_1 \pmod{2}$$

より,

$$S \equiv (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_1) \equiv 0 \pmod{2}$$

よって, S は偶数である. (終)

解 2

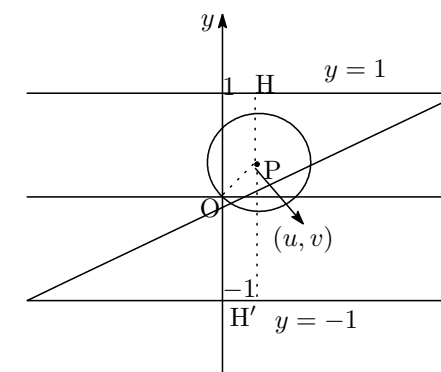
$$\begin{aligned} S^2 &= \left\{ |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_n - x_1| \right\}^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 \\ &\quad + 2\{|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, \dots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1| \text{ の中の異なる 2 項の積の和} \} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \\ &\quad + 2\{|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, \dots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1| \text{ の中の異なる 2 項の積の和} \} \end{aligned}$$

よって, S^2 は偶数で, S も偶数. (終)

第 36 問

xy 平面内の $-1 \leq y \leq 1$ で定められる領域 D と, 中心が P で原点 O を通る円 C を考える。 C が D に含まれるという条件のもとで, P が動きうる範囲を図示し, その面積を求めよ。 (京都大)

—解答例—



$P(u, v)$ とおき, P からに下ろした垂線のと 2 直線 $y = \pm 1$ の交点をそれぞれ H, H' とおくとき, 次の条件を満たすことが必要十分である.

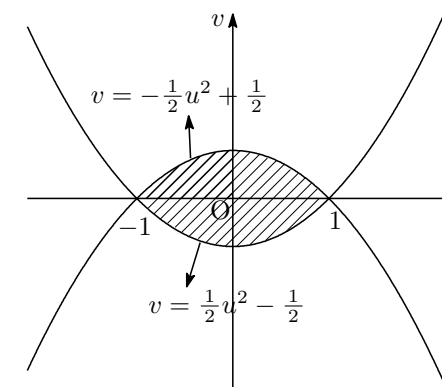
$$\begin{cases} OP \leq PH \iff \sqrt{u^2 + v^2} \leq |1 - v| \cdots \textcircled{1} \\ OP \leq PH' \iff \sqrt{u^2 + v^2} \leq |-1 - v| \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から

$$v \leq -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2} \quad \text{かつ,} \quad v \geq \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

求める図形の面積は図の通り.

$$\begin{aligned} &\therefore 2 \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2} \right) du \\ &= 2 \int_0^1 (1 - u^2) du \\ &= 2 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



第 37 問

空間に異なる 4 点 O, P, Q, R があり,

$$\angle \text{ROP} = \angle \text{OPQ} = \angle \text{PQR} = \angle \text{QRO} = \frac{\pi}{2}$$

を満たしている。このとき, O, P, Q, R は同一平面上にあることを示せ。

—解答例—

$$\angle \text{ROP} = \frac{\pi}{2} \text{ から}$$

右図のように座標系を考える。ここで, 点 Q が xy 平面上にあることを示せばよい。

O(0, 0, 0), P(a, 0, 0), R(0, b, 0), Q(u, v, w) とおく。

$$\overrightarrow{\text{OP}} = (a, 0, 0), \overrightarrow{\text{PQ}} = (u - a, v, w),$$

$$\overrightarrow{\text{RQ}} = (u, v - b, w), \overrightarrow{\text{OR}} = (0, b, 0)$$

条件から

$$\angle \text{OPQ} = \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{\text{PQ}} \cdot \overrightarrow{\text{PQ}} = 0$$

$$\iff a(u - a) = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\angle \text{PQR} = \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{\text{PQ}} \cdot \overrightarrow{\text{RQ}} = 0$$

$$\iff (u - a, v, w) \cdot (u, v - b, w) = 0$$

$$\iff u(u - a) + v(v - b) + w^2 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\angle \text{QRO} = \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{\text{QR}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}} = 0$$

$$\iff b(v - b) = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

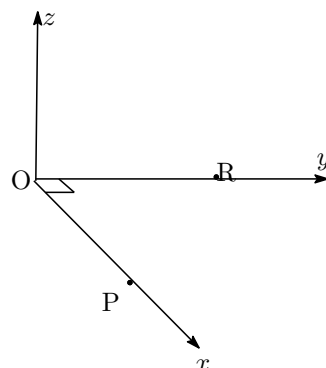
$$\textcircled{1} \text{ において, } P \neq O \text{ より, } a \neq 0 \quad \therefore u = a$$

$$\textcircled{3} \text{ において, } R \neq O \text{ より, } b \neq 0 \quad \therefore v = b$$

またこのとき, $\textcircled{2}$ から, $w = 0$

よって, Q(a, b, 0) と表され, 点 Q は xy 平面上にある。

ゆえに, 4 点 O, P, Q, R は同一平面上にある。(終)



第 38 問

数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件①, ② で定める。

$$\textcircled{1} \quad a_1 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{1 + x a_n} \text{ が整数となるような自然数 } x \text{ のうちで, } x > a_n \text{ を満たす最小の } x \text{ を } a_{n+1} \text{ とする。}$$

このとき

(1) a_2, a_3, a_4 を求め, 結果のみを記せ。

(2) a_n を求めよ。

—解答例—

(1)

$$n = 1 \text{ のとき, } \sqrt{1 + x a_1} = \sqrt{1 + x} > 1 \text{ を満たす最小の } x = 3, \quad \therefore a_2 = 3 //$$

$$\sqrt{1 + x a_2} = \sqrt{1 + 3x} > 3 \text{ より, } a_3 = 5 //$$

$$\sqrt{1 + 5x} > 5 \text{ より, } a_4 = 7 //$$

(2)

(1) から $a_n = 2n - 1$ と推定する。

1. $n = 1$ のとき, $a_1 = 1$ は, $\textcircled{1}$ から明らかに成り立つ。

2. $n = k$ (k は $k \geq 1$ なる整数) のとき, $a_k = 2k - 1 \dots \textcircled{3}$ であると仮定すると

$\sqrt{1 + x(2k - 1)} = l$ ($l > 0$ なる整数) とおける。

$$\text{ここで, } 1 + (2k - 1)x = l^2 \quad \therefore x = \frac{l^2 - 1}{2k - 1}$$

$$\text{仮定より } x > 2k - 1 \quad \therefore \frac{l^2 - 1}{2k - 1} > 2k - 1 \text{ であるから}$$

$$l^2 > (2k - 1)^2 + 1 \text{ よって, } l > 2k - 1 \text{ であることから } l \geq 2k$$

l が最小のとき, x は最小である。このとき, $l = 2k$

またこのとき, $x = 2k + 1$ となり, $a_{k+1} = 2k + 1$

1. 2. より数学的帰納法により, $a_n = 2n - 1$

$$\therefore a_n = 2n - 1 \quad (\text{答})$$

第 39 問

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ を満たすすべての x に対して, 不等式

$$\sin 3x + t \sin 2x > 0$$

が成り立っているとする。このとき t の値の範囲を求めよ。

—解答例—

与式を変形して,

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2t \sin x \cos x > 0 \quad \therefore \sin x (3 - 4 \sin^2 x + 2t \cos x) > 0$$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ であるから, $\sin x > 0$

$$\therefore 3 - 4 \sin^2 x + 2t \cos x > 0 \iff 4 \cos^2 x + 2t \cos x - 1 > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\cos x = X$ とおく。

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ より, } \frac{1}{\sqrt{2}} < X < 1 \cdots \textcircled{2}$$

① より, $f(X) = 4X^2 + 2tX - 1$ で, $f(0) = -1 < 0$ であるから

② のときに, $f(X) > 0$ が成り立つ条件は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \sqrt{2}t - 1 \geq 0$$

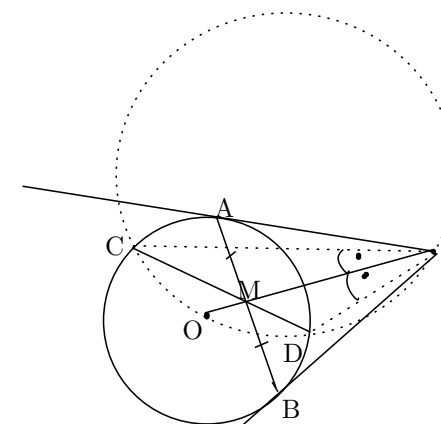
よって求める t の範囲は

$$\underline{\underline{t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}}} \text{ (答)}$$

第 40 問

中心 O の円外の点 P からこの円に 2 本の接線を引き, 接点を A, B とする。弦 AB の中点を M , M を通る任意の弦 CD のうち, 線分 AB と重なる場合と直線 PO 上にある場合を除いたものを考える。このとき, PO は $\angle CPD$ を 2 等分することを証明せよ。

—解答例—



図のように接線を引くと OP は AB の垂直 2 等分線となり,

$$\angle OAP = \angle AMP = \angle OMA = 90^\circ$$

$$\angle OAM = 90^\circ - \angle PAM = \angle APM$$

$\therefore \triangle OMA \sim \triangle AMP$ であるから

$$OM : AM = AM : MP, \quad \therefore OM \cdot MP = AM^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, 円 O において方べきの定理から

$$CM \cdot MD = AM \cdot MB = AM^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から, } OM \cdot MP = CM \cdot MD$$

以上により, 4 点 C, O, D, P は一つの円上にある。

また, $OC = OD$ (= 円 O の半径) であり, $\widehat{OC} = \widehat{OD}$

円周角の関係から, $\therefore \angle OPC = \angle OPD$ (終)

注

CD が AB と重なる場合と, 直線 PO 上にあるときも成立する。

第 41 問

p を素数. n を正の整数とする.

p^n の約数の個数の 2 乗が p^n に等しくなるような p, n の値を求めよ.

—解答例—

p は素数であるから, 約数の個数は 1 と p を入れて, $n+1$ 個ある.

$$\therefore p^n = (n+1)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たすような p, n の値を調べる.

とりあえず実験してみよう.

$$\begin{cases} n=1 & \text{のとき, } p=2^2=4, \text{となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=2 & \text{のとき, } p^2=3^2=9, \text{となり, } p=3. \text{(適)} \\ n=3 & \text{のとき, } p^3=4^2=16, \text{となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=4 & \text{のとき, } p^4=5^2=25, \text{となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=5 & \text{のとき, } p^5=6^2=36, \text{となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \end{cases}$$

$n \geq 6$ のとき, $p^n > (n+1)^2 \cdots \cdots (*)$ なることを示す.

(1) $n=6$ のとき, $p^6 \geq 2^6 = 64 > (6+1)^2 = 49$ で成立.

(2) $n=k$ のとき, $p^k > (k+1)^2$ ($k \geq 6$) が成り立つと仮定する.

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p \cdot p^k \\ &> p(k+1)^2 \quad (\because (*)) \\ &\geq 2(k+1)^2 \quad (\because p \geq 2) \\ 2(k+1)^2 - (k+2)^2 &= k^2 - 2 > 0 \quad (\because k \geq 6) \\ \therefore 2(k+1)^2 &> (k+2)^2 \\ \text{よって, } p^{k+1} &> (k+2)^2 \text{となり, 成立.} \\ \therefore p^n &> (n+1)^2 \quad (n \geq 6) \end{aligned}$$

よって, 求める p, n の値は

$$p=3, \quad n=2 \cdots \cdots (\text{答})$$

第 42 問

三角形 ABC において, $2\angle A + \angle B = 90^\circ$, 辺 CA の長さは 1, 面積は $\sqrt{5}$ であるとき, 辺 AB, BC の長さを求めよ.

—解答例—

$\angle A = \theta$ とおくと

$\angle B = 90^\circ - 2\theta$

$\angle C = 90^\circ + \theta$

これらが正であることから

$$0^\circ < \theta < 45^\circ$$

正弦定理から

$$\frac{BC}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(90^\circ - 2\theta)} = \frac{AB}{\sin(90^\circ + \theta)} \quad \therefore \frac{BC}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{AB}{\cos \theta}$$

したがって,

$$AB = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}, \quad BC = \frac{\sin \theta}{\cos 2\theta} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。一方, 三角形の面積が $\sqrt{5}$ であるから

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \theta = \sqrt{5} \quad \therefore AB \sin \theta = 2\sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より,

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos 2\theta} = 2\sqrt{5} \quad \therefore \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta = 4\sqrt{5}$$

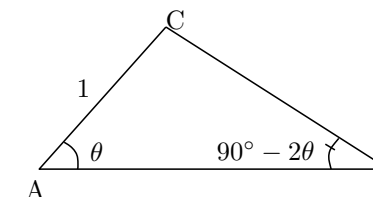
これより,

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}} = \frac{1}{9} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 2\theta}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{3} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④ と① から

$$AB = 3\sqrt{5}, \quad BC = 6 \quad (\text{答})$$



第 43 問

3 個のサイコロをふって出た目を大きさの順に並べたものを

$$a, \quad b, \quad c \quad (a \leq b \leq c)$$

とする。 $1 \leq k \leq 6$ を満たす整数 k に対して

(1) $b = k$ となる確率を求めよ。

(2) $b \leq k$ となる確率を求めよ。

—解答例—

すべての場合の数は、 6^3 通りで、同様に確からしい。

(1)

$b = k$ のとき、

$$a < b < c \cdots \textcircled{1} \quad a = b < c \cdots \textcircled{2}$$

$$a < b = c \cdots \textcircled{3} \quad a = b = c \cdots \textcircled{4}$$

の 4 つの場合がある。

① のとき、 ${}_{k-1}C_1 \times {}_{6-k}C_1 \times 3! = 6(k-1)(6-k)$ 通り。

② のとき、 ${}_{6-k}C_1 \times 3 = 3(6-k)$ 通り。

③ のとき、 ${}_{k-1}C_1 \times 3 = 3(k-1)$ 通り。

④ のとき、 $a = b = c$ なるのは 1 通り

よって、求める確率は

$$\frac{6(k-1)(6-k) + 3(6-k) + 3(k-1) + 1}{6^3} = \frac{-3k^2 + 21k - 10}{108} \quad (\text{答})$$

(2)

(1) より、求める確率 $P(b \leq k)$ は

$$\begin{aligned} P(b \leq k) &= \sum_{l=1}^k \frac{-3l^2 + 21l - 10}{108} \\ &= \frac{1}{108} \left(-\frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + 21 \cdot \frac{k(k+1)}{2} - 10k \right) \\ &= \frac{1}{216} \left\{ -k(2k^2 + 3k + 1 - 21k - 21 + 20) \right\} \\ &= \frac{k^2(9-k)}{108} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 44 問

(1) 3 辺の長さが 2, 3, 4 である三角形がある。その面積は 3 より小さい。これを示せ。

(2) 3 辺の長さが $a-1$, a , $a+1$ である三角形がある。その面積 S を a で表せ。

また、その三角形の内接円の半径を求めよ。ただし、 $a > 2$ とする。

(3) $\frac{S}{a^2}$ の値の範囲を求めよ。

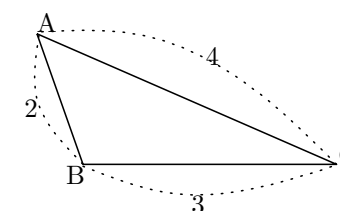
—解答例—

(1)

$4^2 > 3^2 + 2^2$ から、この三角形は鈍角三角形である。(右図)

底辺を 3 とした三角形を考えると、高さは 2 より小さい。

よって、面積は $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ より小さい。(終)



(2)

三角形をなす条件は

$(a-1) + a > a+1$ であるから、 $a > 2$

$a+1$ の対角を θ とおくと、余弦定理から

$$\cos \theta = \frac{(a-1)^2 + a^2 - (a+1)^2}{2 \cdot (a-1)a} = \frac{a-4}{2(a-1)}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ から, } \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{(a-4)^2}{4(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{3(a+2)(a-2)}}{2(a-1)}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times a \times (a-1) \times \frac{\sqrt{3(a+2)(a-2)}}{2(a-1)} \quad \therefore S = \frac{a \sqrt{3(a+2)(a-2)}}{4} \quad (\text{答})$$

内接円の半径を r とおくと

$$r \times \frac{a-1+a+a+1}{2} = \frac{a \sqrt{3(a+2)(a-2)}}{4}, \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3(a+2)(a-2)}}{6} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{S}{a^2} &= \frac{\sqrt{3(a+2)(a-2)}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{(a+2)(a-2)}}{a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{S}{a^2} < \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

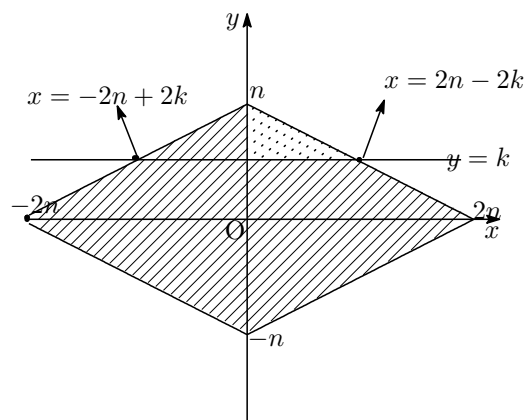
第 45 問

n を正の整数とする。不等式

$$|x| + 2|y| \leq 2n$$

を満たす整数 x, y の組 (x, y) は何個あるか。 n で表せ。このような点 (x, y) を格子点という。

—解答例—



不等式 $|x| + 2|y| \leq 2n$ を満たすグラフは上図である。

直線 $y = k$ ($k \geq 0$ の整数) 上の格子点の個数は

$(2n - 2k) - (-2n + 2k) + 1 = 4n - 4k + 1$ 個ある。

$k = 0$ のとき、 $4n + 1$ 個であり、図形の対称性から、求める格子点の総数は

$$\begin{aligned} (4n + 1) + 2 \times \sum_{k=1}^n (4n + 1 - 4k) &= 4n + 1 + 2 \left\{ n(4n + 1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) \right\} \\ &= 4n + 1 + 2(2n^2 - n) \\ &= 4n^2 + 2n + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 46 問

a, b, c は正の実数で、 $a + b = 1$, $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ を満たすとき

(1) c のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $a^2 + b^2 + c^2$ の最大値を求めよ。

—解答例—

(1) $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ より、 $(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = 1$ $1 - 3a(1 - a) + c^3 = 1$

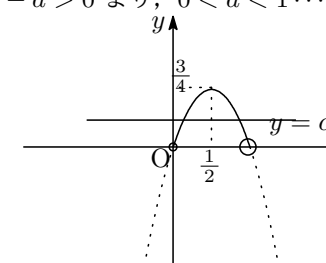
$$\therefore c^3 = 3a - 3a^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ の右辺を $f(a)$ とおく。 $a > 0$ かつ、 $b = 1 - a > 0$ より、 $0 < a < 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ よりグラフをかいて

$$0 < c^3 \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore 0 < c \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \quad (\text{答})$$



(2) $a + b = 1$, $a^3 + b^3 = 1 - c^3$ より

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - c^3, \quad \therefore ab = \frac{1}{3}c^3$$

$$\text{よって、} a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 - 2ab + c^2 = 1 - \frac{2}{3}c^3 + c^2$$

$$f(c) = -\frac{2}{3}c^3 + c^2 + 1 \quad \left(0 < c \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \right) \text{ とおくと、}$$

$$f'(c) = -2c^2 + 2c = -2c(c - 1)$$

増減表は

| | | | |
|---------|---|------------|------------------------------|
| c | 0 | $\cdots$ | $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ |
| $f'(c)$ | | + | |
| $f(c)$ | 1 | $\nearrow$ | $\frac{2 + \sqrt[3]{36}}{4}$ |

ゆえに、 $c = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ のとき、 $a + b = 1$, $ab = \frac{1}{4}$ となり

a, b は方程式

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \text{ の 2 解で、} a = b = \frac{1}{2}$$

このとき、題意の式は 最大値： $\frac{2 + \sqrt[3]{36}}{4}$ をとる。(答)

第 47 問

不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq ax(y - z)$$

がすべての実数 x, y, z に対して成り立つように, 実数 a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

x について整理して

$$x^2 - a(y - z)x + (y^2 + z^2) \geq 0 \cdots \textcircled{1}$$

① がすべての実数 x について成り立つことから

$$a^2(y - z)^2 - 4(y^2 + z^2) \leq 0$$

$$\therefore (a^2 - 4)y^2 - 2a^2yz + (a^2 - 4)z^2 \leq 0 \cdots \textcircled{2}$$

② がすべての実数 y, z に対して成り立つ条件を求める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } a^2 = 4 \text{ (} a = \pm 2 \text{) のとき,} \\ \text{すべての実数 } y, z \text{ に対して, } -8yz \leq 0 \text{ (これは不適)} \\ \text{(ii) } a^2 < 4 \text{ のとき, } (-2 < a < 2 \cdots \textcircled{3}) \\ a^4 z^2 - (a^2 - 4)^2 z^2 \leq 0 \iff 8(a^2 - 2)z^2 \leq 0 \text{ (for all } z \in R) \\ \iff -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2} \cdots \textcircled{4} \end{array} \right.$$

③, ④ より,

$$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2} \text{ (答)}$$

第 48 問

曲線 $C: y = x^3 - x + 6$ に対して点 $(a, 0)$ ($a > 0$) から C へ 3 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

$$y' = 3x^2 - 1 \text{ から, } \left[y' \right]_{x=t} = 3t^2 - 1$$

よって, $x = t$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t + 3) = (3t^2 - 1)(x - t) \quad \therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 6 \cdots \textcircled{1}$$

① が点 $(a, 0)$ を通るから

$$(3t^2 - 1)a - 2t^3 + 6 = 0 \quad \therefore 2t^3 - 3at^2 + a - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

ここで, ② が異なる 3 つの実数解をもつことが必要十分である。

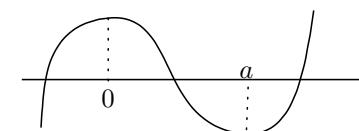
$$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a - 6 \text{ において}$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a) \quad f'(t) = 0 \text{ より, } t = 0, a$$

増減表を考えて

| | | | | | |
|---------|------------|----|------------|-----|------------|
| t | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | a | $\cdots$ |
| $f'(t)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(t)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

$f(t)$ のグラフが下図のようになればよい。



$$\therefore \begin{cases} f(0) = a - 6 > 0 & \therefore a > 6 \cdots \textcircled{3} \\ f(a) = -a^3 + a - 6 < 0 & \therefore a^3 - a + 6 > 0 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$a > 6$ のとき, ④ は常に成り立つ。($\because a(a^2 - 1) + 6 > 0$)

よって, ③, ④ から, 求める a の値の範囲は

$$a > 6 \text{ (答)}$$

第 49 問

方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解 α について次のことがらを示せ。

- (1) α は整数でない。
- (2) α は有理数でない。
- (3) α は $p + q\sqrt{3}$ (p, q は有理数, $q \neq 0$) の形で表せない。

—解答例—

- (1) α が整数とすると, $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \quad \therefore \alpha(\alpha^2 - 3) = 1 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ より, α が奇数でなくてはならない。
 ところが, α を奇数とすれば, $\alpha^2 - 3$ は偶数となり,
 $\textcircled{1}$ の左辺はいずれにしても偶数となり不合理である。よって, α は整数でない。(終)
- (2) α を有理数として, $\alpha = \frac{m}{n}$ (m, n は互いに素な整数で, $n \neq 0$) と仮定すると
 $\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\frac{m}{n} - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ の両辺を n^2 倍して,
 $\frac{m^2}{n} - 3mn - n^2 = 0 \iff \frac{m^2}{n} = n(3m + n) \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ の右辺は整数であるから, 左辺も整数である。
 m, n は互いに素であるから, $n = 1$ 以外にはありえない。
 従って, $\alpha = m$ (整数) となり, (1) に矛盾する。
 よって, α は有理数でない。(終)
- (3) $\alpha = p + q\sqrt{3}$ とすると
 $(p + q\sqrt{3})^3 - 3(p + q\sqrt{3}) - 1 = 0$
 $\therefore p^3 + 9pq^2 - 3p - 1 + 3q(p^2 + q^2 - 1)\sqrt{3} = 0 \cdots \textcircled{4}$
 p, q は有理数であり, $q \neq 0$ であるから $\textcircled{4}$ より

$$\begin{cases} p^3 + 9pq^2 - 3p - 1 = 0 \cdots \textcircled{5} \\ p^2 + q^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

 $\textcircled{5} - \textcircled{6} \times 9p$ より
 $-8p^3 + 6p - 1 = 0$ となり, $(-2p)^3 - 3(-2p) - 1 = 0$
 これは, $x^3 - 3x - 1 = 0$ が有理数 $-2p$ を解にもつことになり, 不合理。
 よって, α は $p + q\sqrt{3}$ の形で表せない。(終)

第 50 問

xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ おける接線 l に

定点 $P(p, 0)$, $Q(-q, 0)$ ($1 < q < p$) から引いた垂線の足をそれぞれ R, S とする。

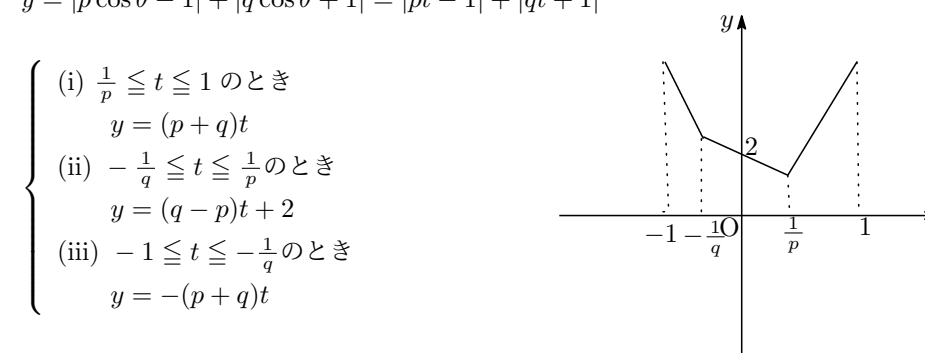
- (1) l の方程式を求めよ。
- (2) $PR^2 + QS^2$ の最小値を求めよ。
- (3) $PR + QS$ を最小にする接線 l を求めよ。

—解答例—

- (1) $l: x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ (答)
- (2) $PR = \frac{|p \cos \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |p \cos \theta - 1|$, $QS = \frac{|-q \cos \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |q \cos \theta + 1|$

$$\begin{aligned} PR^2 + QS^2 &= (p \cos \theta - 1)^2 + (q \cos \theta + 1)^2 \\ &= (p^2 + q^2) \cos^2 \theta - 2(p - q) \cos \theta + 2 \\ &= (p^2 + q^2) \left(\cos \theta - \frac{p - q}{p^2 + q^2} \right)^2 + \frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

 $p > q > 1$, $p^2 + q^2 - (p - q) = p(p - 1) + q(q + 1) > 0$ より, $0 < \frac{p - q}{p^2 + q^2} < 1$
 よって, $\cos \theta = \frac{p - q}{p^2 + q^2}$ のとき, 最小値: $\frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2}$ (答)
- (3) $\cos \theta = t$, $PR + QS = y$ とおいて
 $y = |p \cos \theta - 1| + |q \cos \theta + 1| = |pt - 1| + |qt + 1|$



グラフから, $PR + QS$ が最小になるのは, $t = \cos \theta = \frac{1}{p}$ のときで,

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}$$

よって求める接線の式は, $\frac{1}{p}x \pm \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}y = 1 \iff x \pm \sqrt{p^2 - 1}y = p$ (答)

第 51 問

y 軸上の正の部分に中心をもち、放物線 $y = x^2$ と 2 点で接する円の列 $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$ を満たすように定める

(1) O_1 の半径は 1 である。

(2) $n \geq 2$ のとき、 O_n は O_{n-1} に外接し、 O_n の中心の y 座標は O_{n-1} の中心の y 座標より大きい。

このとき、円 O_n の方程式を求めよ。(大阪大)

—解答例—

円 O_n の半径を r_n 、中心を $(0, b_n)$ とおく。

接点の座標 (x_n, x_n^2) ($x_n > 0$) とおくと、この点における接線に垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{2x_n}$

であり、この直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2x_n}(x - x_n) + x_n^2 \\ &= -\frac{1}{2x_n}x + x_n^2 + \frac{1}{2} \quad \therefore b_n = x_n^2 + \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $r_n = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{4}}$ より、

$$r_n^2 = x_n^2 + \frac{1}{4}$$

2 円の外接条件から

$$b_{n+1} - b_n = r_{n+1} + r_n \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から

$$r_n^2 = x_n^2 + \frac{1}{2} = b_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \therefore r_n^2 = b_n - \frac{1}{4}$$

$$\therefore r_{n+1}^2 - r_n^2 = b_{n+1} - b_n$$

$$\therefore r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_{n+1} + r_n \quad \therefore r_{n+1} - r_n = 1 \cdots \textcircled{3}; (\because r_{n+1} + r_n > 0)$$

$$\textcircled{3} \text{ と } r_1 = 1 \text{ から, } r_n = 1 + (n-1) \quad \therefore r_n = n$$

$$\text{また, } b_{n+1} - b_n = (n+1) + n = 2n+1$$

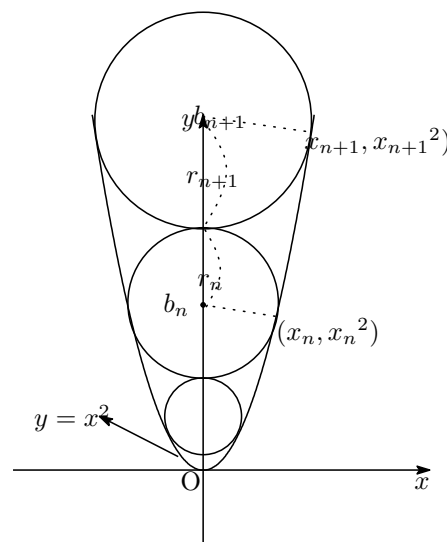
$$\text{ここで, } r_1 = 1 \text{ より, } x_n^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore b_1 = \frac{5}{4} (\because \textcircled{1})$$

$n \geq 2$ において、

$$b_n = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{5}{4} + n(n-1) + (n-1) = n^2 + \frac{1}{4} \quad (n=1 \text{ も満たす})$$

以上から、求める円 O_n の方程式は

$$x^2 + \left(y - n^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = n^2 \quad (\text{答})$$



第 52 問

α は $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする。任意の自然数 n に対して、 $2^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n とし、

$$2^{n-1}\alpha = a_n + b_n \text{ とおくと}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } 0 \leq b_n < \frac{1}{2}$$

$$n \text{ が偶数のとき, } \frac{1}{2} < b_n < 1$$

になるという。 a_n および α を求めよ。

(東工大)

—解答例—

n が奇数のとき、 $n = 2m - 1$ ($m \geq 1$ なる整数) とおいて

$$2^{2m-2} = a_{2m-1} + b_{2m-1}$$

$$\therefore 2^{2m} = a_{2m+1} + b_{2m+1} \text{ で, } b_{2m+1} = 4b_{2m-1} - 1$$

$$b_{2m+1} - \frac{1}{3} = 4 \left(b_{2m-1} - \frac{1}{3} \right) = 4^2 \left(b_{2(m-1)-1} - \frac{1}{3} \right) = \cdots = 4^m \left(b_1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\therefore b_{2m+1} = 4^m \left(b_1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ において、 $m \rightarrow \infty$ として、 $0 \leq b_{2m+1} < \frac{1}{2}$ であるから

$$b_1 = \frac{1}{3} \text{ でなくてはならない。このとき, } 2^0\alpha = \alpha = b_1 \text{ より, } \alpha = \frac{1}{3} \text{ (答)}$$

$$b_{2m-1} = \frac{1}{3}$$

したがって、 $\frac{2^{n-1}}{3}$ の小数部分は、 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の繰り返しになり

$$\therefore \begin{cases} \text{(i) } n \text{ が奇数のとき, } a_n = \frac{2^{n-1} - 1}{3} \\ \text{(ii) } n \text{ が偶数のとき, } a_n = \frac{2^{n-1} - 2}{3} \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{3} \text{ (答)}$$

第 53 問

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 26, \quad S_{n+1} = 2(a_n + a_{n+1}) - n^2 - 64 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たしている。ただし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ である。このとき, すべての自然数 n に対して

$$a_n > (n+4)^2$$

が成り立つことを示せ。

—解答例—

条件式から,

$$\begin{cases} S_{n+1} = 2(a_n + a_{n+1}) - n^2 - 64 \cdots \textcircled{1} \\ S_{n+2} = 2(a_{n+1} + a_{n+2}) - (n+1)^2 - 64 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より, $a_{n+2} = 2a_{n+2} - 2a_n - (2n+1)$

$$\therefore a_{n+2} = 2a_n + 2n + 1 \cdots \textcircled{3}$$

また, $\textcircled{1}$ において, $n = 1$ のとき,

$$S_2 = 2(a_1 + a_2) - 65 \quad S_2 = a_1 + a_2 \text{ であるから, } 26 + a_2 = 65 \quad \therefore a_2 = 39$$

(i) $n = 1$ のとき, $a_1 = 26 > 5^2$ となり, 成立.

また, $n = 2$ のとき, $a_2 = 39 > (2+4)^2$ となり成立.

(ii) $n = k$ ($k \geq 1$) のとき, 成り立つと仮定する.

$$\therefore a_k > (k+4)^2 \cdots \cdots (\star)$$

$n = k+2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{k+2} - (k+6)^2 &= 2a_k + 2k + 1 - (k+6)^2 \\ &> 2(k+4)^2 + 2k + 1 - (k+6)^2 = k^2 + 6k - 3 \quad (\because (\star)) \\ &= (k+3)^2 - 12 \geq 4^2 - 12 > 0 \quad (\because k \geq 1) \\ \therefore a_{k+2} &> (k+6)^2 \end{aligned}$$

よって, $n = k$ のとき成り立つと仮定すると, $n = k+2$ のとき成り立つ.

したがって, 奇数, 偶数それぞれにおいて成り立つ.

以上から, 数学的帰納法により, すべての自然数に対して

$$a_n > (n+4)^2 \quad (\text{終})$$

第 54 問

ある直円錐とそれに内接する球の体積の比が $2:1$ であるとき, この直円錐の底面の半径と高さの比を求めよ。

—解答例—

図のように底面に垂直で底面の円の中心を通る

平面で切った断面図を考える。

底面の半径を r , 高さを h , 球の半径を x とする。

$\triangle ACH \cap \triangle AOK$ であるから

$$AC : AO = CH : OK$$

$$\therefore \sqrt{r^2 + h^2} : (h - x) = r : x \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned} r(h - x) &= x\sqrt{r^2 + h^2} \\ \iff r^2(h - x)^2 &= x^2(r^2 + h^2) \\ \iff r^2h - 2r^2x &= hx^2 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

また, 条件から,

$$\frac{1}{3}\pi r^2h : \frac{4}{3}\pi x^3 = 2:1 \quad \therefore r^2h = 8x^3, \quad \therefore \frac{h}{r} = 8\left(\frac{x}{r}\right)^3 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ から

$$r^2h - 2r^2x = hx^2 \quad \therefore \frac{h}{r} - 2 \cdot \frac{x}{r} = \frac{h}{r} \left(\frac{x}{r}\right)^2 \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{h}{r} = t, \quad \frac{x}{r} = l \text{ とおくと } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より,}$$

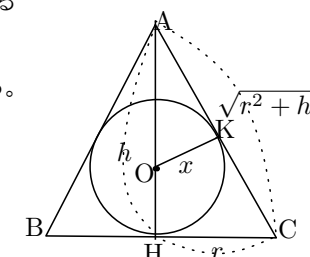
$$t = 8l^3, \quad t - 2l = tl^2$$

$$\text{これより, } 8l^3 - 2l = 8l^5 \quad \therefore 2l(2l^2 - 1)^2 = 0, \quad \therefore l = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because l > 0)$$

$$\text{よって, } t = 8l^3 = 8 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

したがって, このとき,

$$h : r = 1 : 2\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

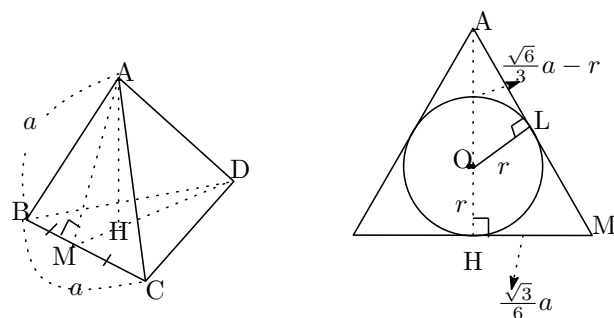


第 55 問

一辺の長さが a の正四面体 ABCD において

- (1) 体積 V を求めよ。
- (2) この四面体に内接する球の半径 r を求めよ。

—解答例—



- (1) 辺 BC の中点を, M, 頂点 A から $\triangle BCD$ へ下ろした垂線の足を, H とすると, H は, $\triangle BCD$ の重心である。

$$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ で, } MH = \frac{1}{3}DM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\therefore AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \text{ (答)}$$

- (2) 内接円の中心を O とすると図より, $\triangle AOL \sim \triangle AMH$

$$\therefore OA : AM = r : MH$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a \times r = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - r \right) \times \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{1}{3}r \quad \therefore \frac{4}{3}r = \frac{\sqrt{6}}{9}a$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{12}a \text{ (答)}$$

- (2) の (別解)

内接円の中心から 4 頂点を結んでできる 4 つの四面体 (三角錐) はいずれも合同であるから

$$4 \times \frac{1}{3} \times r \times \triangle BCD = V \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 r = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

第 56 問

$x \geq 0$ のとき, つねに $x^3 - ax + 1 \geq 0$ が成り立つような実数 a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

$$f(x) = x^3 - ax + 1 \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

- (i) $a \leq 0$ のとき, 常に $f'(x) \geq 0$ より, $f(x)$ は単調増加。

$x \geq 0$ のとき, $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$ から, $f(x) > 0$ ($x \geq 0$)

- (ii) $a > 0$ のとき, $f'(x) = 3 \left(x + \sqrt{\frac{a}{3}} \right) \left(x - \sqrt{\frac{a}{3}} \right)$

増減表を書いて

| x | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{\frac{a}{3}}$ | $\cdots$ |
|---------|---|------------|----------------------|------------|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 1 | $\searrow$ | 最小 | $\nearrow$ |

$\therefore$ 最小値 $f \left(\sqrt{\frac{a}{3}} \right) = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} - a \sqrt{\frac{a}{3}} + 1 \geq 0$ なることが条件.

$$\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} \leq 1 \iff a^3 \leq \frac{27}{4} \iff 0 < a \leq \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} \left(= \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \right)$$

- (i), (ii) より, 求める a の値の範囲は

$$a \leq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \text{ (答)}$$

第 57 問

p および n を 2 以上の整数とすると、整数

$$p^n + (1-p)n - 1$$

は整数 $(p-1)^2$ で割り切れることを証明しなさい。

—解答例—

証明①

$p-1=x$ とおく。

$$\begin{aligned} p^n + (1-p)n - 1 &= (x+1)^n - nx - 1 \\ &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}x + 1 - nx - 1 \\ &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + x^2 \\ &= x^2({}_nC_0x^{n-2} + {}_nC_1x^{n-3} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + 1) \\ &\quad \text{となり,} \\ x^2 &= (p-1)^2 \text{ で割り切れる. (終)} \end{aligned}$$

証明②

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ であることを利用すると、

$$\begin{aligned} p^n + (1-p)n - 1 &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + 1) - n(p-1) \\ &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 - n) \\ &= (p-1)\{(p^{n-1} - 1) + (p^{n-2} - 1) + \cdots + (p - 1)\} \\ &= (p-1)^2\{(p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + 1) + (p^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + 1\} \\ &\quad \text{以上により, 題意の式は } (p-1)^2 \text{ で割り切れる. (終)} \end{aligned}$$

別解

(オプションとして・・・微分)

一般に、整式「 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる $\iff f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ 」

$f(p) = p^n + (1-p)n - 1$ とおく。

$f(1) = 0$ また、 $f'(p) = np^{n-1} - n$ より、 $f'(1) = n - n = 0$

よって、 $f(p)$ は $(p-1)^2$ で割り切れる。(終)

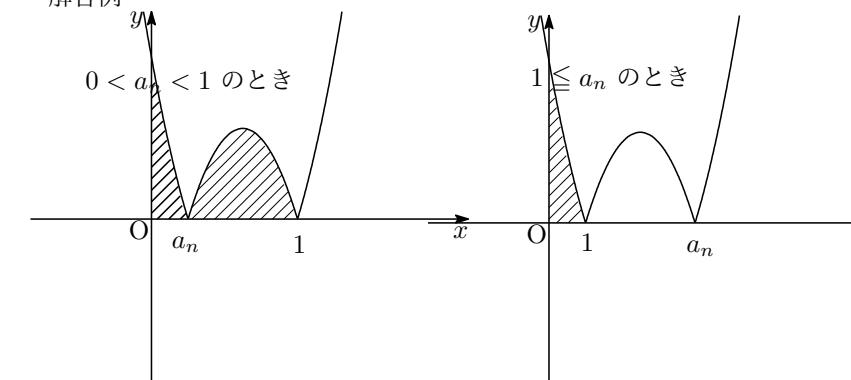
第 58 問

数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) を次の式で定める。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 6 \int_0^1 |(x-a_n)(x-1)| dx$$

このとき、 a_n を求めよ。

—解答例—



(i) $0 < a_n < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \int_0^{a_n} (x-a_n)(x-1) dx - 6 \int_{a_n}^1 (x-a_n)(x-1) dx \\ &= [2x^3 - 3(a_n+1)x^2 + 6a_nx]_0^{a_n} + 6 \cdot \frac{1}{6} (1-a_n)^3 \\ &= -2a_n^3 + 6a_n^2 - 3a_n + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a_n$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \int_0^1 (x-a_n)(x-1) dx \\ &= [2x^3 - 3(a_n+1)x^2 + 6a_nx]_0^1 \\ &= 3a_n - 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$a_2 = -2 \cdot \frac{1}{2^3} + 6 \cdot \frac{1}{2^2} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \quad (\because a_1 = \frac{1}{2})$$

$$a_3 = -2 \left(\frac{3}{4} \right)^3 + 6 \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 3 \left(\frac{3}{4} \right) + 1 = \frac{41}{32}$$

② より、 $n \geq 3$ のとき、 $a_n \geq 1$ ならば、 $a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 2 > 1$

$\therefore n \geq 3$ のとき、 $a_{n+1} = 3a_n - 1$ であるから、

$$a_n - \frac{1}{2} = 3 \left(a_{n-1} - \frac{1}{2} \right) = \cdots = 3^{n-3} \left(a_3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} + \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3} \quad (n \geq 3) \cdots (\text{答})$$

第 59 問

xy 平面上で、円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の外部にある点 $P(a, b)$ を考える。

点 P から円 C に引いた 2 つの接線の接点を Q_1, Q_2 とし、線分 Q_1Q_2 の中点を Q とする。点 P が円 C の外部で、 $x(x - y + 1) < 0$ を満たす範囲にあるとき、点 Q の存在する領域を図示せよ。

—解答例—

まず、点 P は円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるから

$$a^2 + b^2 > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ とおくと

点 Q_1, Q_2 における接線は、それぞれ

$$x_1 x + y_1 y = 1, \quad x_2 x + y_2 y = 1 \text{ となる。}$$

いずれも点 (a, b) を通ることから、

$$a x_1 + b y_1 = 1, \quad a x_2 + b y_2 = 1$$

よって直線 Q_1Q_2 の式は

$$a x + b y = 1 \cdots \textcircled{2}$$

また、点 O, P, Q は一直線上にあり、点 Q は線分 Q_1Q_2 の垂直二等分線 $b x - a y = 0 \cdots \textcircled{3}$

と $\textcircled{1}$ の直線の交点である。

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を連立させて解くと

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b}{a^2 + b^2} \cdots \textcircled{4} \quad (\because \textcircled{1})$$

$\textcircled{4}$ から、 $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$ であるから

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\because (x, y) \neq (0, 0))$$

$\textcircled{1}$ から、 $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 > 1$

$$\therefore x^2 + y^2 < 1 \cdots \textcircled{5}$$

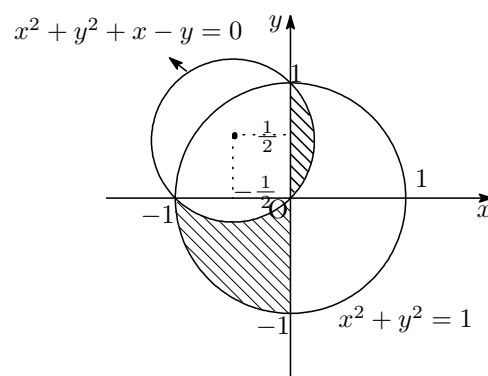
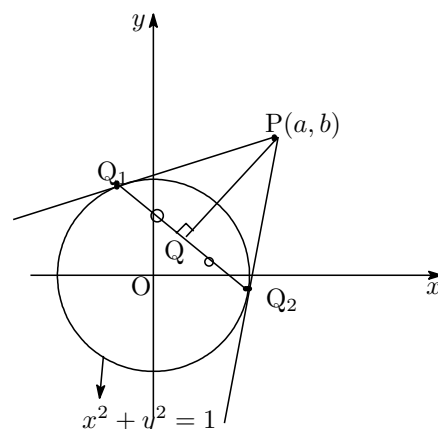
また、与えられたもう一つの条件から

$$a(a - b + 1) < 0$$

$$\iff \frac{x}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \right) < 0$$

$$\therefore x \left\{ \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right\} < 0 \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}, \textcircled{6}$ から、求める範囲は右上図の斜線部分 (境界は含まない) (答)



第 60 問

a, b, c を正の数とすると、不等式

$$2 \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right) \leq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \right)$$

が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立するのはどんな場合か。

—解答例—

証明

右辺 - 左辺 $= c - 3\sqrt[3]{abc} + 2\sqrt{ab}$ を $f(t)$ とする。

$\sqrt[3]{c} = t (> 0)$ とおくと

$$f(t) = t^3 - \sqrt[3]{ab} t + 2\sqrt{ab}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 3\sqrt[3]{ab} = 3(t - \sqrt[3]{ab})(t + \sqrt[3]{ab})$$

増減表をかいて

| | | | | |
|---------|---|------------|----------------|------------|
| t | 0 | $\cdots$ | $\sqrt[3]{ab}$ | $\cdots$ |
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | 最小 | $\nearrow$ |

したがって、 $t = \sqrt[3]{ab}$ のとき最小となり

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(\sqrt[3]{ab}) \\ &= \sqrt{ab} - 3(\sqrt[3]{ab})^2 \sqrt[3]{ab} + 2\sqrt{ab} \\ &= 3\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab} = 0 \end{aligned}$$

よって、 $t > 0$ のとき、 $f(t) \geq 0$ が成立する。

等号が成立するのは、

$t = \sqrt[3]{ab} \iff \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{ab}$ より、 $c = \sqrt{ab}$ のときである。

$$\therefore 2 \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right) \leq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \right) \quad (c = \sqrt{ab} \text{ のとき等号成立}) \quad (\text{終})$$

第 61 問

x についての 2 次方程式 $x^2 + (2t + k + 1)x + (kt + 6) = 0$ を考える。この 2 次方程式が、 $-1 \leq t \leq 1$ となるすべての t に対して実数解をもつための k の値の範囲を求めよ。また、この 2 次方程式が、 $-1 \leq t \leq 1$ となる少なくとも 1 つの t に対して実数解をもつための k の値の範囲を求めよ。

—解答例—

(1)

$$2 \text{ 次方程式 } x^2 + (2t + k + 1)x + (kt + 6) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (2t + k + 1)^2 - 4(kt + 6) \geq 0 \\ &\iff 4t^2 + 4t + k^2 + 2k - 23 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$f(t) = 4t^2 + 4t + k^2 + 2k - 23 \quad \text{とにおいて}$$

② がすべての t ($-1 \leq t \leq 1$) について成り立つ条件を求める。

$$f(t) = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k^2 + 2k - 24 \quad \text{から}$$

$$\text{軸 } t = -\frac{1}{2} \quad \text{であるから, 最小値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ であり,}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = k^2 + 2k - 24 \geq 0 \text{ なることが必要十分である.}$$

$$\therefore k \leq -6, \quad 4 \leq k \text{ (答)}$$

(2)

② を満たす t が少なくとも一つ存在する条件を求める。

$$f(t) \text{ の軸が } t = -\frac{1}{2} \text{ であることより}$$

$-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値が $f(1)$ であり,

題意を満たすのは, $f(1) \geq 0$ なることが必要十分である。

$$\therefore f(1) = k^2 + 2k - 15 = (k + 5)(k - 3) \geq 0 \iff k \leq -5, \quad 3 \leq k \text{ (答)}$$

第 62 問

平面上の直線

$$y = 2(\sin \theta + \cos \theta)x - 1 - \sin 2\theta$$

を l_θ とする。ここで θ は $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ を満たす実数とする。

(1) $a = \cos \theta + \sin \theta$ とするとき, a の値の範囲を求めよ。

(2) θ を動かすとき直線 l_θ が通る点全体の集合を D とする。 D を図示せよ。

—解答例—

(1)

$$a = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ と変形して}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi \text{ であるから,} \quad 0 \leq a \leq \sqrt{2} \text{ (答)}$$

(2)

$$a = \cos \theta + \sin \theta \text{ より,}$$

$$a^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta \quad \therefore \sin 2\theta = a^2 - 1$$

よって, l_θ の式は

$$y = 2ax - 1 - (a^2 - 1) \quad \therefore a^2 - 2ax + y = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ とおける.}$$

① を満たす a が $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ に少なくとも一つ存在する条件を求める。

いま, $f(a) = a^2 - 2ax + y$ とおく。

(ア) 一つ存在するとき (両端を通るときも含む)

$$f(0) \cdot f(\sqrt{2}) = y(2 - 2\sqrt{2}x + y) \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

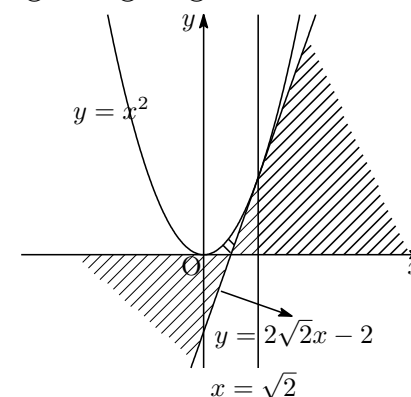
(イ) 二つ存在するとき

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = x^2 - y \geq 0 \quad \therefore y \leq x^2 \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{軸 } a = x \text{ より, } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \cdots \textcircled{4}$$

$$f(0) = y \geq 0, \quad f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}x + y \geq 0 \cdots \textcircled{5}$$

② と, ③ ~⑤ より, 求める範囲は図の斜線部分 (境界を含む) (答)



第 63 問

数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = -an^2 + bn + c, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、次の 2 つの条件 (A), (B) を満たす自然数 a, b, c を求めよ。

(A) $4, x_1, x_2$ はこの順で等差数列である。

(B) すべての自然数 n に対して、 $\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq x_n x_{n+1} + 1$ が成り立つ。

—解答例—

(A) より、 $2x_1 = x_2 + 4$

$x_1 = -a + b + c, \quad x_2 = -4a + 2b + c$ であるから、

$$-2a + 2b + 2c = -4a + 2b + c + 4, \quad \therefore 2a + c = 4$$

a, c は自然数であるから、 $a = 1, c = 2$

(B) より、 $\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq 1$

$$\text{ここで、} x_n - x_{n+1} = -n^2 + bn + 2 - \{-(n+1)^2 + b(n+1) + 2\} = 2n + 1 - b$$

ゆえにすべての自然数 n に対して

$$\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq 1 \iff |2n + 1 - b| \geq 2$$

$b \geq 2$ のとき、 $|2n + 1 - b| \leq 1$ を満たす自然数 n が存在して、不適。

$$\therefore b = 1$$

以上から、 $a = 1, b = 1, c = 2$ (答)

第 64 問

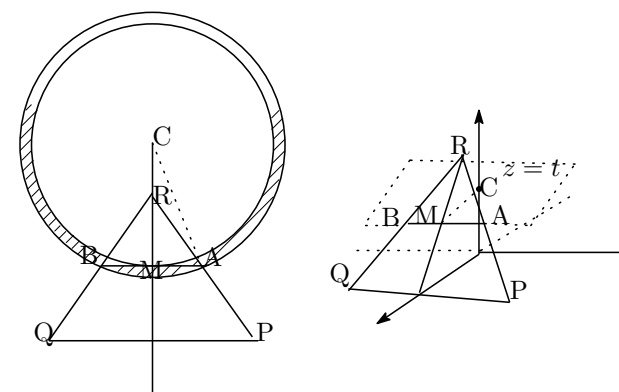
空間内に、3 点

$$P\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad Q\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right), \quad R\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

を頂点とする正三角形の板 S がある。

S を z 軸のまわりに 1 回転させたとき、 S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

—解答例—



直線 PR, QR は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

平面 $z = t$ で切ったときの切り口を AB とすると、 $\frac{\sqrt{3}}{4}l = t$ より、 $l = \frac{4}{\sqrt{3}}t$

$$\therefore A\left(1 - \sqrt{3}t, \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}t, t\right), \quad B\left(1 - \sqrt{3}t, -\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}t, t\right)$$

AB の中点 M $(1 - \sqrt{3}t, 0, t)$

$$\text{ここで切断面の面積 } S(t) = \pi(CA^2 - CM^2) = \pi AM^2 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2$$

よって求める図形の体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2 dt \\ &= \pi \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{48} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 65 問

n を自然数とする.

(1) $\sqrt{n^2 - 9n - 1}$ が整数となるような n の値をすべて求めよ.

(2) $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数であることを証せ.

—解答例—

(1)

$\sqrt{n^2 - 9n - 1} = m$ (m は正の整数) とおく.

$n^2 - 9n - 1 = m^2 \iff 4n^2 - 4 \cdot 9n - 4 = 4m^2$ であるから

$(2n - 9)^2 - (2m)^2 = 85 \iff (2n - 9 + 2m)(2n - 9 - 2m) = 85$

$n^2 - 9n - 1 \geq 0$ であるから, $n(n - 9) \geq 1 \quad \therefore n \geq 10$

よって, $2n - 9 + 2m, 2n - 9 - 2m > 0$ で, $2n - 9 + 2m > 2n - 9 - 2m$ であるから

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2n - 9 + 2m = 17 \\ 2n - 9 - 2m = 5 \end{cases} \quad \text{または, } \textcircled{2} \begin{cases} 2n - 9 + 2m = 85 \\ 2n - 9 - 2m = 1 \end{cases}$$

の場合があり, $\textcircled{1}$ のとき, $(n, m) = (10, 3)$, $\textcircled{2}$ のとき, $(n, m) = (26, 21)$

$\therefore n = 10, 26 \cdots$ (答)

(2)

$n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$ であるから, $\sqrt{n(n+1)}$ は整数ではない.

$\sqrt{n(n+1)} = \frac{p}{q}$ (p, q は互いに素な整数) とすると,

$n(n+1) = \frac{p^2}{q^2}$ より, 左辺は正の整数であるから, $q^2 = 1$

このとき, $n(n+1) = p^2 \iff \sqrt{n(n+1)} = |p|$ となり, $n(n+1)$ が整数となる. (これはありえない)

ゆえに, $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数である. (答)

第 66 問

x について恒等的に

$$\sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x + 2\alpha) = 0$$

が成り立つように定数 α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) を定めよ.

—解答例—

解 1

(必要条件から)

$x = 0, \frac{\pi}{2}$ について成り立つことが必要である.

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ であるから, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$(-\sin \alpha)^2 + (-1 - \cos \alpha)^2 = 1 \quad \therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

これから, $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ を得る.

逆に, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ のとき, 与式は

$$\sin x + \sin x \cos \frac{2}{3}\pi + \cos x \sin \frac{2}{3}\pi + \sin x \cos \frac{4}{3}\pi + \cos x \sin \frac{4}{3}\pi = 0$$

となり, 成立する. $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ のときも同様. よって十分条件でもある.

以上により, $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \cdots$ (答)

別解

(式を変形する)

与式を変形して

$$2 \sin \frac{(x+2\alpha)+x}{2} \cos \frac{(x+2\alpha)-x}{2} + \sin(x+\alpha) = 0$$

$$\therefore \sin(x+\alpha)(2 \cos \alpha + 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ はすべての x について成り立つから,

$$2 \cos \alpha + 1 = 0 \iff \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

別解 2

$$\sin x + \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha + \sin x \cos 2\alpha + \cos x \sin 2\alpha = 0$$

$$(1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha) \sin x + (\sin \alpha + \sin 2\alpha) \cos x = 0 \quad (\text{左辺を合成して})$$

$\therefore \sqrt{(1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha)^2 + (\sin \alpha + \sin 2\alpha)^2} \sin(x + \beta) = 0$ から, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を得る. (あとは同様)