

入試問題研究－2015 年 数学補題 (記述・論述)

(倉敷南高等学校 2015.3.6～)

- 1** 直線 $\ell : y = kx + m$ ($k > 0$) が円 $C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$ に接している．このとき，以下の問いに答えよ． (2015 大阪大)

- (1) k と m の値を求めよ．
- (2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および， y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

- 2** 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは上に凸であり，原点および点 $(a, 0)$ を通るものとする．ただし， $0 < a < 1$ とする．関数 $y = x^2$ のグラフを C ，関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし， C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする．点 P における C の接線の傾きを m ， D の接線の傾きを n とするとき

$$(2a - 1)m = 2an$$

が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ． (2015 岡山大)

- (1) $f(x)$ を x と a の式で表せ．
- (2) $0 \leq x \leq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする． $S(a)$ を a の式で表せ．
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ．

- 3** a, b は定数で， $ab > 0$ とする．放物線 $C_1 : y = ax^2 + b$ 上の点 $P(t, at^2 + b)$ における接線を ℓ とし，放物線 $C_2 : y = ax^2$ と ℓ で囲まれた図形の面積を S とする． (2015 金沢大)

- (1) ℓ の方程式を求めよ．
- (2) ℓ と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ．
- (3) 点 P が C_1 上を動くとき， S は点 P の位置によらず一定であることを示せ．

- 4** 直線 $y = px + q$ が， $y = x^2 - x$ のグラフとは共有点をもつが， $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは共有点をもたないような点 (p, q) の存在範囲を図示し，その面積を求めよ． (改題 2015 京都市大)

入試問題 解答例 1

2015 大阪大学 (文系)

—解答例—

1

(1) 直線 ℓ は円 C_1 と接することから

$$\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \iff (m-1)^2 = k^2 + 1 \dots\dots ①$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx + m \quad \text{において}$$

ℓ は C_2 と接することから

$$x^2 + 2kx + 2m = 0 \quad \text{より}$$

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = k^2 - m = 0 \quad \therefore k^2 = m \dots\dots ②$$

①, ② より $(m-1)^2 = 2m+1 \implies m(m-4) = 0$ から $m = 0, 4$

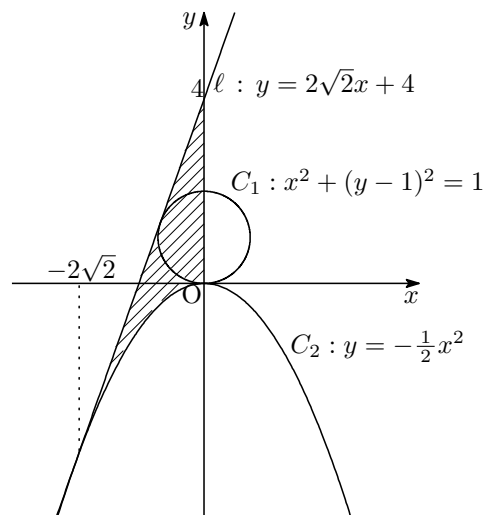
② より, $m = 0$ のときは, $k = 0$ となり, 不適.

したがって, $m = 4$ のときは, $k^2 = 8$ となり, $k > 0$ から, $k = 2\sqrt{2}$.

$$k = 2\sqrt{2}, \quad m = 4 \quad (\text{答})$$

(2) 求める面積を S とする. 図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ 2\sqrt{2}x + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{2}}^0 (x + 2\sqrt{2})^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x + 2\sqrt{2})^3}{3} \right]_{-2\sqrt{2}}^0 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



入試問題 解答例 2

2015 岡山大学 (文系)

—解答例—

2

(1)

$$f(x) = kx(x-a) \quad g(x) = x^2 \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = k(2x-a), \quad g'(x) = 2x$$

$$kx(x-a) = x^2 \quad \text{とおくと, } x\{k(x-a)-x\} = 0$$

$$(k-1)x = ka \quad \text{で, } k < 0 \quad \text{から, } x = \frac{ka}{k-1}$$

$$m = g' \left(\frac{ka}{k-1} \right) = \frac{2ka}{k-1}$$

$$n = f' \left(\frac{ka}{k-1} \right) = \frac{k(k+1)a}{k-1}$$

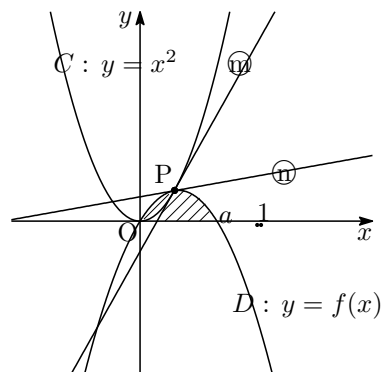
$$(2a-1)m = 2an \quad \text{から}$$

$$(2a-1) \cdot \frac{2ka}{k-1} = 2a \cdot \frac{k(k+1)a}{k-1}$$

$$(2a-1) = a(k+1) \quad \text{であるから,}$$

$$k = \frac{a-1}{a} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$$\text{よって, } f(x) = \frac{a-1}{a}x(x-a) \quad (\text{答})$$



(2) 図より,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \frac{a-1}{a}x(x-a) dx \\ &= \frac{1-a}{6a}(a-0)^3 = \frac{(1-a)a^2}{6} \end{aligned}$$

$$S(a) = \frac{(1-a)a^2}{6} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad S'(a) = \frac{2a-3a^2}{6} = -\frac{a(3a-2)}{6}$$

$S'(a)$ とおいて, $a=0, \frac{2}{3}$ であり, 増減表を書いて,

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	最大	↘	

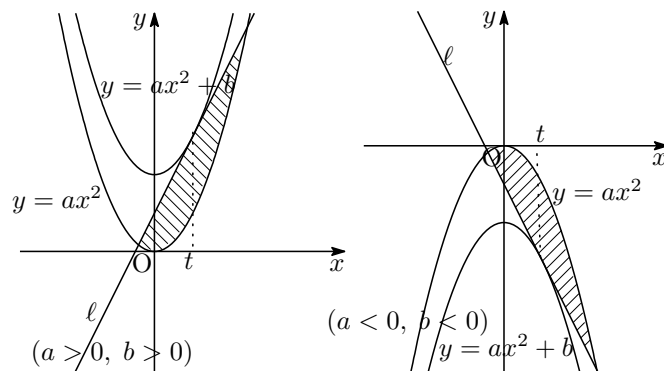
$$a = \frac{2}{3} \quad \text{のとき, } S(a) \text{ は最大となり, 最大値 } S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{81}$$

$$\text{最大値 } \frac{2}{81} \quad \left(a = \frac{2}{3} \text{ のとき}\right) \quad (\text{答})$$

入試問題 解答例 3

2015 金沢大学 (文系)

—解答例—



- (1) $ab > 0$ から, 上図の 2 つの場合が考えられるが, 実は x 軸に関して対称であることから, $a > 0, b > 0$ として, 一般性を失わない.

放物線 $C_2: y = ax^2 + b$ より, $\left[y' \right]_{x=t} = 2at$ であるから,
接線 ℓ の方程式は

$$y - (at^2 + b) = 2at(x - t) \implies y = 2atx - at^2 + b \text{ (答)}$$

- (2) $ax^2 = 2atx - at^2 + b$ において, $a > 0, b > 0$ の下で

$$a(x - t)^2 = b \implies x - t = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \therefore x = t \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{交点の } x \text{ 座標は, } t \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ (答)}$$

- (3) $\alpha = t - \sqrt{\frac{b}{a}}, \beta = t + \sqrt{\frac{b}{a}}$ とおくとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ (2atx - at^2 + b) - ax^2 \} dx \\ &= -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{a}{6} \left(2\sqrt{\frac{b}{a}} \right)^3 = \frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{a}} \implies (t \text{ に無関係で一定}) \\ &\text{よって, 題意は成立 (終)} \end{aligned}$$

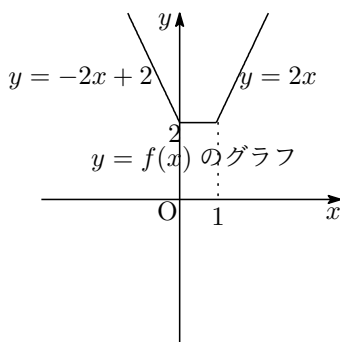
入試問題 解答例 4

2015 京都大学 (文系)

—解答例—

$f(x) = |x| + |x - 1| + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $g(x) = px + q \cdots \cdots \textcircled{2}$ とおく.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (x \leq 0) \\ 2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 2x & (1 < x) \end{cases}$$



より, $y = f(x)$ のグラフの概形は右図.

$$x^2 - x = px + q \quad \text{とおくとき,}$$

$$x^2 - (p+1)x - q = 0$$

共有点をもつ条件から

$$D = (p+1)^2 + 4q \geq 0 \implies q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \cdots \textcircled{3}$$

$g(x) = px + q$ が $f(x)$ と交わらないためには

$$-2 \leq p \leq 2$$

であることが必要条件であり, $\{-2 \leq p \leq 0\} \cap \{g(0) = q < 2\}$

または, $\{0 \leq p \leq 2\} \cap \{q < -p + 2\}$

が成り立つ. したがって点 (p, q) の存在範囲を図示すると, 図の斜線部分で白丸は除き, 黒丸は含む. 境界は太線部分を含む.

求める面積を S とするとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left\{ 2 + \frac{1}{4}(p+1)^2 \right\} dp - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= \left[2p + \frac{(p+1)^3}{12} \right]_{-2}^2 - 2 \\ &= \frac{25}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

