

1 $a > 0$ とする. C_1 を曲線 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$, C_2 を直線 $y = 2ax - 3a$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が C_1 上を動き, 点 Q が C_2 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする. $f(a)$ を a を用いて表せ.
- (2) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ を求めよ.

2 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たす自然数 n について考える.

- (i) n は素数ではない.
- (ii) l, m を 1 でもない n でもない n の正の約数とすると必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が偶数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (2) n が 7 の倍数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.

3 xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, \sqrt{3}, 1)$ がある. 平面 $z = 0$ に含まれ, 中心が O , 半径が 1 の円を W とする. 点 P が線分 OA 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく. 同様に点 P が線分 OB 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく. さらに, V_A と V_B の重なり合う部分を V とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ
- (2) 立体 V の体積を求めよ.

—解答例—

1(1) $P(\cos \theta, a \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とおく.点 P から直線 C_2 へ下ろした垂線の長さを d ($= PQ$) とすると,

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|2a \cos \theta - a \sin \theta - 3a|}{\sqrt{4a^2 + 1}} \\
 &= \frac{|\sqrt{5} a \sin(\theta + \alpha) - 3a|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \frac{a|\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) - 3|}{\sqrt{4a^2 + 1}} \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

ここで $|\sin(\theta + \alpha)| \leq 1$ より
 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のとき, d は最小となり

$$f(a) = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \dots (\text{答})$$

(2)

(1) より

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

—解答例—

2(1) $l \geq m (\geq 2)$ とおいて一般性は失われない.

$$\begin{cases} (\text{ア}) l - m = 0 & \text{のとき, } n = 4 \quad (l = m = 2) \\ (\text{イ}) l - m = 1 & \text{のとき, } m = 2, l = 3 \quad \therefore n = 3 \cdot 2 = 6 \\ (\text{ウ}) l - m = 2 & \text{のとき, } m = 2, l = 4 \quad \therefore n = 8 \end{cases}$$

(i), (ii) の条件を見たす n は (ア)~(ウ) の場合以外にはない.

$$\therefore n = 4, 6, 8 \cdots (\text{答})$$

(2) $n = 7k$ (k は正の整数) の形になり, 条件 (i), (ii) を満たすのは $l = 7$ のとき, $m = 5, 6, 7$ の場合があり, $m = 6 = 2 \times 3$ の場合は条件をみたさない. $m = 5, 7$ のとき, $n = 35, 49$ となり, それ以外はない.また, $k \geq 2$ なる偶数のときは, (ii) を満たさない. $\therefore n = 35, 49 \cdots (\text{答})$ (3) n が偶数の場合は, $n = 4, 6, 8$ であり, 奇数で素数でないものを考える. $2 \leq 2p - 1 \leq 1000$ を満たす正の整数 p は, $\frac{3}{2} \leq p \leq \frac{1001}{2}$ より, $2 \leq p \leq 500$ (ア) $n = (2p - 1)^2$ のとき, $2 \leq (2p - 1)^2 \leq 1000$ となり, $\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \leq p \leq \frac{10\sqrt{10} + 1}{2}$ であり $2 \leq p \leq 16$ よって, $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ のときを調べて $n = 9, 25, 49, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, 625, 729, 841, 961$ で条件をみたすのは

$$n = 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961$$

(イ) $n = (2p + 1)(2p - 1)$ のとき, $2 \leq 4p^2 - 1 \leq 1000 \iff \frac{\sqrt{3}}{2} \leq p \leq \frac{\sqrt{1001}}{2}$ であることから,

$$1 \leq p \leq 15$$

 $p = 1, 2, 3, 4, \dots, 15$ の場合を調べて $n = 3, 15, 35, 63, 99, 143, 195, 255, 323, 399, 483, 575, 675, 783, 899$ の場合があるが, 条件をみたすのは $n = 15, 35, 143, 323, 899$ の場合である. 以上より, 求める n は

$$n = 4, 6, 8, 9, 15, 25, 35, 49, 121, 143, 169, 289$$

$$323, 361, 529, 841, 899, 961 \cdots (\text{答})$$

—解答例—

3

(1)

線分 OA 上の点 P を $s(1, 0, 1)$ ($0 \leq s \leq 1$) とし, Q を $(X, Y, 0)$ とおく

$R(x, y, z)$ として

$$\overrightarrow{OR} = (s, 0, s) + (X, Y, 0) = (s + X, Y, s) \cdots \textcircled{1}$$

線分 OB 上の点 P を $t(0, \sqrt{3}, 1)$ ($0 \leq t \leq 1$) とし, Q を $(u, v, 0)$ とおく

$$\overrightarrow{OR} = (0, \sqrt{3}t, t) + (u, v, 0) = (u, \sqrt{3}t + v, t) \cdots \textcircled{2}$$

$X^2 + Y^2 \leq 1, \quad u^2 + v^2 \leq 1$ と $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から

$$\begin{cases} (x - s)^2 + y^2 \leq 1 & (z = s) \cdots \textcircled{3} \\ x^2 + (y - \sqrt{3}t)^2 \leq 1 & (z = t) \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$z = \cos \theta$ における切断面は, $s = t = \cos \theta$ とおいて, $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

$(x - \cos \theta)^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y - \sqrt{3} \cos \theta)^2 \leq 1$ であり, 図の斜線部分になる.

図におけるそれぞれの点を, A, B, P, Q, M とおくと (M は AB, PQ の中点)

$AB = \sqrt{\cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta$ であるから

$AM = \cos \theta$ であり, また, $PM = QM = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta$ ($\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) となる.

斜線部分の面積を S とおくと, $\angle PAM = \angle QAM = \theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 2\theta - \sin 2\theta \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 求める立体の体積 V は

$$V = \int_0^1 S dz = \int_0^1 (2\theta - \sin 2\theta) dz, \quad dz = -\sin \theta d\theta, \quad \left. \begin{matrix} z \\ \theta \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{であるから}$$

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta &= \left[\theta(-\cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{であるから} \\ V &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

