

1 a を定数とする. O を原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする.

(1) $r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ と表すとき, $r, \cos \theta, \sin \theta$ を a で表せ.

(2) 点 $Q(1, 0)$ に対し, 点 Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$Q_1 = Q, \quad Q_{n+1} = f(Q_n)$$

で定める. $\triangle OQ_nQ_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ.

(3) f によって点 $(2, 7)$ に移される元の点 P の x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという. 自然数 a の値を求めよ. またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ. ただし, $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい.

2 実数 θ が動くとき, xy 平面上の動点 $P(0, \sin \theta)$ および $Q(8 \sin \theta, 0)$ を考える. θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動くとき, 平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする. D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

—解答例—

1

$$(1) A = \sqrt{a^2 + 1} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} & -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{pmatrix} \text{と変形して}$$

$$r = \sqrt{a^2 + 1}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{OQ_{n+1}} = A \overrightarrow{OQ_n}$ より, $\overrightarrow{OQ_{n+1}}$ は $\overrightarrow{OQ_n}$ を角度 θ だけ原点まわりに回転して, $\sqrt{a^2 + 1}$ 倍したものである.

$$\overrightarrow{OQ_n} = A^{n-1} \overrightarrow{OQ_1}, \quad \overrightarrow{OQ_{n+1}} = A^n \overrightarrow{OQ_1} \quad \text{より}$$

$$A^{n-1} = \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{であるから, } \overrightarrow{OQ_n} = \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ_{n+1}} = \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{2n-1} |\sin \theta| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{(a^2 + 1)^{n-1}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta + 7 \sin \theta \\ -2 \sin \theta + 7 \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで, 題意の } x \text{ 座標は, } x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (2 \cos \theta + 7 \sin \theta) = \frac{2a + 7}{a^2 + 1}$$

$$\text{条件より, } \frac{3}{2} \leq \frac{2a + 7}{a^2 + 1} < \frac{5}{2} \iff 3a^2 - 4a - 11 \leq 0, \quad 5a^2 - 4a - 2 > 0$$

$$\text{これより, } \frac{2 + \sqrt{14}}{5} < a \leq \frac{2 + \sqrt{37}}{3} \text{ で, } 3 < \sqrt{14} < 4, \quad 6 < \sqrt{37} < 7 \text{ であるから,}$$

$$1 < a < 3 \text{ を満たす自然数 } a \text{ を求めて, } \quad a = 2 \quad (\text{答})$$

$$a = 2 \text{ のとき, } S_n = \frac{5^{n-1}}{2} > 10^{10} \text{ より}$$

$$\log_{10} \frac{5^{n-1}}{2} > 10 \iff (n-1)(1 - \log_{10} 2) > 10 \text{ より}$$

$$\therefore n > 1 + \frac{10}{1 - \log_{10} 2} \text{ となり, } 0.3 < \log_{10} 2 < 0.31 \text{ であるから}$$

$$\frac{10}{1 - \log_{10} 2} > \frac{10}{0.69} > 14.4 \dots, \quad \frac{10}{0.7} > 14.28 \dots \text{ より, } n > 15.4 \dots \text{ であることから}$$

$$n \geq 16 \text{ よって, 最小の } n = 16 \quad (\text{答})$$

—解答例—

2 2 点 $P(0, \sin \theta)$, $Q(8 \cos \theta, 0)$ を通る線分の式は $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{x}{8 \cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} = 1 \quad (x > 0, y > 0) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

とおける. これから, $y = \sin \theta - \frac{x}{8} \tan \theta$ と変形して, x を定数とみると, ① から

$$y = f(\theta) = \sin \theta - \frac{x}{8} \tan \theta \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos \theta - \frac{x}{8 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(2 \cos \theta - \sqrt[3]{x})(4 \cos^2 \theta + 2 \sqrt[3]{x} \cos \theta + \sqrt[3]{x^2})}{8 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = 0 \text{ において } \cos \theta = \frac{\sqrt[3]{x}}{2} \left(0 < \frac{\sqrt[3]{x}}{2} < 1 \right) \text{ なる } \theta = \alpha \text{ において増減表をかく.}$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$$\text{このとき, } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}} = \frac{\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ であるから}$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}}{2} - \frac{x}{8} \times \frac{\frac{\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}}{2}}{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} = \frac{(4 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}}{8}$$

$$0 \leq y \leq \frac{(4 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}}{8} \text{ を満たす } (x, y) \text{ について } y' = \frac{3}{16} (4 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{3}{8} x (4 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{2}}$$

より, $0 \leq x \leq 8$ において, $y' \leq 0$

グラフの概略を考えて ($\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ の場合も含めて), 求める回転体の体積は

$$V = \pi \int_0^8 y^2 dx = \frac{\pi}{64} \int_0^8 (4 - \sqrt[3]{x^2})^3 dx$$

$$\sqrt[3]{x} = t \text{ において, } dx = 3t^2 dt$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \rightarrow 8 \\ t & 0 & \rightarrow 2 \end{array} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2^6} \int_0^2 (4 - t^2)^3 \cdot 3t^2 dt \\ &= \frac{3\pi}{2^6} \int_0^2 (64t^2 - 48t^4 + 12t^6 - t^8) dt \\ &= \frac{3\pi}{2^6} \left[\frac{64}{3} t^3 - \frac{48}{5} t^5 + \frac{12}{7} t^7 - \frac{t^9}{9} \right]_0^2 \\ &= \pi \left(8 - \frac{72}{5} + \frac{72}{7} - \frac{8}{3} \right) = \frac{128}{105} \pi \text{ (答)} \end{aligned}$$

