

第 1 問 (配点 20)

[1] $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．このとき，不等式

$$\left| 2abx - a^2 \right| < b^2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる．

[2] 実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める．

$$p: (a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$$

$$q: |a+b| < 1 \text{ または } |a-2b| < 2$$

(1) 次の① ～③ のうち，命題「 $q \implies p$ 」に対する反例となっているのは $\boxed{\text{チ}}$ である．

① $a = 0, b = 0$

① $a = 1, b = 0$

② $a = 0, b = 1$

③ $a = 1, b = 1$

(2) 命題「 $p \implies q$ 」の対偶は「 $\boxed{\text{ツ}} \implies \boxed{\text{テ}}$ 」である．

$\boxed{\text{ツ}}$ ， $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の① ～⑦ のうちから一つずつ選べ．

① $|a+b| < 1$ かつ $|a-2b| < 2$ ① $(a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$

② $|a+b| < 1$ または $|a-2b| < 2$ ③ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \leq 5$

④ $|a+b| \geq 1$ かつ $|a-2b| \geq 2$ ⑤ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 > 5$

⑥ $|a+b| \geq 1$ または $|a-2b| \geq 2$ ⑦ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5$

(3) p は q であるための $\boxed{\text{ト}}$ ．

$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の ① ～③ から一つ選べ．

① 必要十分条件である．

① 必要条件であるが，十分条件でない．

② 十分条件であるが，必要条件でない．

③ 必要条件でも十分条件でもない．

第 2 問 (配点 25)

a, b, c を定数とし, $a \neq 0, b \neq 0$ とする. x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots \cdots \text{①}$$

のグラフを G とする. G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

となる. さらに, G が点 $(1, 2b - 1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \quad \cdots \cdots \text{③}$$

が成り立つ.

以下, ②, ③ のとき, 2 次関数 ① とそのグラフ G を考える.

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$$

である. さらに, G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である.

(2) $b > 0$ とする.

$0 \leq x \leq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき,

$$b = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \quad \text{である. 一方, } x \geq b \text{ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき,}$$

$$b = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad \text{である.}$$

$$b = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad \text{のときの ① のグラフをそれぞれ } G_1, G_2 \text{ とする.}$$

G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば, G_2 と一致する.

第 3 問 (配点 30)

点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A, B, C, D がこの順にある．四角形 $ABCD$ の辺の長さは，それぞれ

$$AB = \sqrt{7}, \quad BC = 2\sqrt{7}, \quad CD = \sqrt{3}, \quad DA = 2\sqrt{3}$$

であるとする．

(1) $\angle ABC = \theta$, $AC = x$ とおくと， $\triangle ABC$ に着目して

$$x^2 = \boxed{\text{アイ}} - 28 \cos \theta$$

となる．また， $\triangle ACD$ に着目して

$$x^2 = 15 + \boxed{\text{ウエ}} \cos \theta$$

となる．よって， $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ ， $x = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$ であり，円 O の半径は $\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

また，四角形 $ABCD$ の面積は $\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(2) 点 A における円 O の接線と点 D における円 O の接線の交点を E とすると， $\angle OAE = \boxed{\text{シス}}^\circ$ である．また，線分 OE と辺 AD の交点を F とすると， $\angle AFE = \boxed{\text{セソ}}^\circ$ であり，

$$OF \cdot OE = \boxed{\text{タ}}$$

である．

さらに，辺 AD の延長と線分 OC の延長の交点を G とする．点 E から直線 OG に垂線を下ろし，直線 OG との交点を H とする．

4 点 E, G ， $\boxed{\text{チ}}$ は同一円周上にある． $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを次の① ～ ④ から一つ選べ．

- ① C, F ① H, D ② H, F ③ H, A ④ O, A

したがって

$$OH \cdot OG = \boxed{\text{ツ}}$$

である．

第 4 問 (配点 25)

1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る確率 p は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，

5 以上の目が出る確率 q は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

以下では，1 個のさいころを 8 回繰り返して投げる．

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $\boxed{\text{オカ}} p^3 q^5$ である．

第 1 回目に 4 以下の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は

$\boxed{\text{キク}} p^3 q^5$ である．

第 1 回目に 5 以上の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は

$\boxed{\text{ケコ}} p^3 q^5$ である．

(2) 次の① ～⑦ のうち $\boxed{\text{オカ}}$ に等しいものは $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ である．

ただし， $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ は解答の順序を問わない．

- | | | | |
|--|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ① ${}_7\text{C}_2 \times {}_7\text{C}_3$ | ① ${}_8\text{C}_1 \times {}_8\text{C}_2$ | ② ${}_7\text{C}_2 + {}_7\text{C}_3$ | ③ ${}_8\text{C}_1 + {}_8\text{C}_2$ |
| ④ ${}_7\text{C}_4 \times {}_7\text{C}_5$ | ⑤ ${}_8\text{C}_6 \times {}_8\text{C}_7$ | ⑥ ${}_7\text{C}_4 + {}_7\text{C}_5$ | ⑦ ${}_8\text{C}_6 + {}_8\text{C}_7$ |

(3) 得点を次のように定める．

8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出た場合，

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について，第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき，得点は n 点とする．

また，4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とならないときは，得点を 0 点とする．

このとき，得点が 6 点となる確率は $p^{\boxed{\text{ズ}}}_q^{\boxed{\text{セ}}}$ であり，得点が 3 点となる確率は $\boxed{\text{ソタ}} p^{\boxed{\text{ズ}}}_q^{\boxed{\text{セ}}}$ である．

また，得点の期待値は $\frac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である．

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のとき、関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta$$

の最小値を求めよう.

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \text{ とおくと}$$

$$t^2 = \boxed{\text{ア}} \cos^2 \theta + \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \sin \theta \cos \theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから

$$y = t^2 - \boxed{\text{オ}} t - \boxed{\text{カ}}$$

となる. また

$$t = \boxed{\text{キ}} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \right)$$

である.

$\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leq \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leq \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるから, t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{コサ}} \leq t \leq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である. したがって, y は $t = \boxed{\text{ス}}$, すなわち $\theta = -\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき,

最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる.

[2] 自然数 x で, 条件

$$12 \left(\log_2 \sqrt{x} \right)^2 - 7 \log_4 x - 10 > 0 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$x + \log_3 x < 14 \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

を満たすものを求めよう.

まず, x を正の実数として, 条件① を考える. ① は $X = \log_2 x$ とおくと

$$6X^2 - \boxed{\text{チ}} X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

となる. この2次不等式を解くと

$$X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

となるしたがって, 条件① を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ネ}}$ であり, $\boxed{\text{ネ}}$ 以上のすべての自然数 x は① を満たす.

次に, 条件② について考えると, ② を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり, $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は② を満たす.

したがって, 求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である.

第2問 (必答問題) (配点 30)

座標平面上で、放物線 $y = x^2$ を C とする.

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする. 点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{アイ}} x - a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である. $a \neq 0$ のとき直線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とすると, Q の座標は

$$\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \boxed{\text{カ}} \right)$$

である.

$a > 0$ のとき, 曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である.

$a < 2$ のとき, 曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}} + \boxed{\text{サ}} a^2 - \boxed{\text{シ}} a + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である.

$a = 0$ のときは $S = 0$, $a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして, $0 \leq a \leq 2$ に対して $U = S + T$

とおく. a がこの範囲を動くとき, U は $a = \boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり,

$a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる.

第3問 (選択問題) (配点 20)

数直線上で点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の座標といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す．
 数直線上に点 $P_1(1)$, $P_2(2)$ をとる．線分 P_1P_2 を $3:1$ に内分する点を P_3 とする．一般に、自然数 n に対し
 て線分 P_nP_{n+1} を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とする．点 P_n の座標を x_n とする．

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ であり、 $x_3 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるために、

この数列の階差数列を考えよう．自然数 n に対して $y_n = x_{n+1} - x_n$ とする．

$$y_1 = \boxed{\text{ウ}}, \quad y_{n+1} = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} y_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である．したがって、 $y_n = \left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{\boxed{\text{キ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であり

$$x_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}} \left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{\boxed{\text{サ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる．ただし、 $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{サ}}$ については、当てはまるものを次の① ～③ のうちから一つずつ選べ．
 同じものを繰り返し選んでもよい．

- ① $n - 1$ ① n ② $n + 1$ ③ $n + 2$

次に、自然数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n k |y_k|$ を求めよう． $r = \left| \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right|$ とおくと

$$S_n - r S_n = \sum_{k=1}^{\boxed{\text{シ}}} r^{k-1} - nr^{\boxed{\text{ス}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であり、したがって

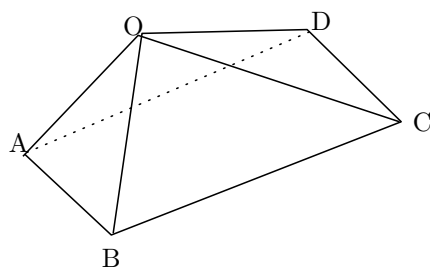
$$S_n = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}} \right)^{\boxed{\text{ツ}}} \right\} - \frac{n}{\boxed{\text{テ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}} \right)^{\boxed{\text{ヲ}}}$$

となる．ただし、 $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ については、当てはまるものを
 次の① ～③ のうちから一つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

- ① $n - 1$ ① n ② $n + 1$ ③ $n + 2$

第4問 (選択問題) (配点 20)

四角錐^{すい}OABCD において、三角形 OBC と三角形 OAD は合同で、
 $OB = 1$, $BC = 2$, $OC = \sqrt{3}$ であり、底面の四角形 ABCD は長方形である。 $AB = 2r$ とおき、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。



$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{ア}}$ $\vec{a} - \boxed{\text{イ}}$ $\vec{b} + \vec{c}$ である。
 辺 OD を 1 : 2 に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{AL} = -\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

となる。

さらに辺 OB の中点を M, 3 点 A, L, M の定める平面を α とし、平面 α と辺 OC との交点を N とする。点 N は平面 α 上にあることから、 $\overrightarrow{AN}$ は実数 s, t を用いて $\overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AL} + t\overrightarrow{AM}$ と表されるので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} = & \left(\boxed{\text{キ}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s - t \right) \vec{a} \\ & + \left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}} + \frac{t}{\boxed{\text{サ}}} \right) \vec{b} + \frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。一方、点 N は辺 OC 上にもある。これらから、 $\overrightarrow{ON} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$ となる。

また、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}r^2, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{チ}}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ツテ}}r^2$$

である。よって、 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN}$ を計算すると、 $AB = \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる。

第 1 問

$$[1] \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2} \Leftarrow \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

同様にして, $\frac{1}{b} = 2 - \sqrt{3} \Leftarrow \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= (3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2}) \\ &= 6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6} - (6-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}) \\ &= 8\sqrt{2}-6\sqrt{3} \Leftarrow \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \end{aligned}$$

$a, b > 0$ であることから

$$|2abx - a^2| < b^2 \iff -b^2 < 2abx - a^2 < b^2 \iff \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) < x < \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) &= \left\{ 6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6} + (6-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}) \right\} \\ &= 6-2\sqrt{6} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) &= 4\sqrt{2}-3\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから

$$4\sqrt{2}-3\sqrt{3} < x < 6-2\sqrt{6}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

註

丁寧な計算と, 同時に, 迅速に処理することが求められる.

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ に気がつけば, 計算は容易になるはず.

また, 絶対値のついた不等式は, 完全に解けるようにしておきたい.

[2]

(1) $a = b = 1$ は, 条件 q は満たすが, 条件 p は満たさない.

$$\therefore \textcircled{3} \Leftarrow \boxed{\text{チ}}$$

(2) 命題「 $p \implies q$ 」の対偶は

$$\bar{q} \implies \bar{p}$$

$$\text{であるから, } \textcircled{4} \Leftarrow \boxed{\text{ツ}}, \textcircled{7} \Leftarrow \boxed{\text{テ}}$$

(3)

命題「 $p \implies q$ 」は真であるが, 命題「 $q \implies p$ 」の対偶は偽であることから

$$\textcircled{2} \text{ 十分条件であるが, 必要条件ではない } \Leftarrow \boxed{\text{ト}}$$

註

必要条件, 十分条件の問題は必須問題である. 完璧にマスターしておこう.

第 2 問

① を変形して, $y = a \left(x + \frac{a}{2a} \right)^2 + \dots$ であることから, 軸は $x = -\frac{b}{2a}$

また, ② より, $y = -3(x^2 - 4bx) = -3(x - 2b)^2 + 12b^2$ から, 軸は $x = 2b$
条件から

$$-\frac{b}{2a} = 2b, \quad b \neq 0 \quad \text{であるから} \quad a = \frac{-1}{4} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{アイ} \\ \hline \text{ウ} \\ \hline \end{array}$$

G が点 $(1, 2b - 1)$ を通ることから

$$2b - 1 = a + b + c, \quad \therefore c = b - a - 1 = b - \frac{3}{4} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{エ} \\ \hline \text{オ} \\ \hline \end{array}$$

(1)

x 軸と異なる 2 点で交わる条件は, G が上に凸の放物線であることより

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4}$$

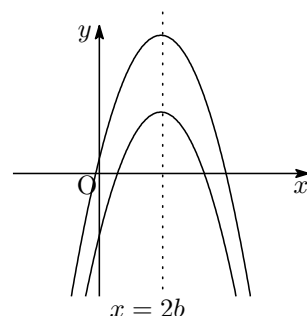
$$= \frac{1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 + b - \frac{3}{4} \quad \text{であるから}$$

$$b^2 + b - \frac{3}{4} > 0 \quad \text{であることが条件である.}$$

$$\therefore 4b^2 + 4b - 3 = (2b + 3)(2b - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{-3}{2}, \quad \frac{1}{2} < b$$

$$\Leftarrow b < \frac{\text{カキ}}{\text{ク}}, \quad \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} < b$$



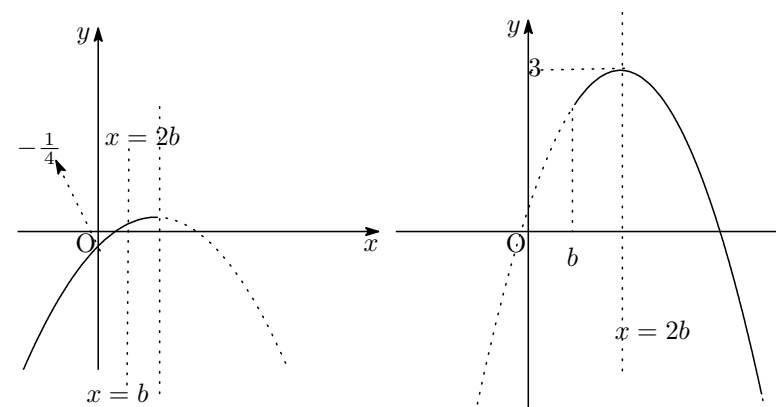
さらに, x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わることより

$$2b > 0, \quad f(0) = b - \frac{3}{4} < 0 \quad \text{である.} \quad \therefore b > 0, \quad b < \frac{3}{4}$$

これらの共通部分を求めて

$$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{サ} \\ \hline \text{シ} \\ \hline \end{array} < b < \begin{array}{|c|} \hline \text{ス} \\ \hline \text{セ} \\ \hline \end{array}$$

$b > 0$ のとき, 題意を満たす G のグラフを考えて



(2)

$0 \leq x \leq b$ における最小値は $x = 0$ のときであり,

$$f(0) = b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \quad \text{より,} \quad b = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}$$

$x \geq b$ において, $x = 2b (> b)$ で最大となるから

$$f(2b) = b^2 + b - \frac{3}{4} = 3$$

$$\therefore 4b^2 + 4b - 15 = (2b - 3)(2b + 5) = 0$$

$$b > 0 \quad \text{より,} \quad b = \frac{3}{2} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{チ} \\ \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array}$$

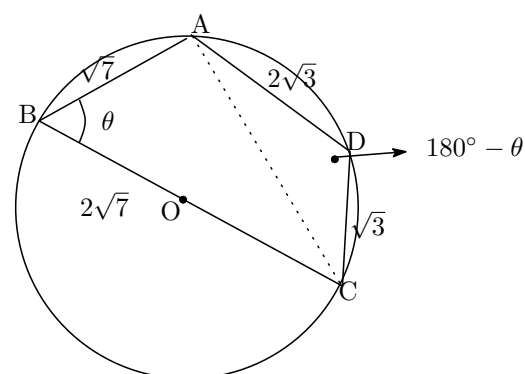
$$b = \frac{1}{2} \quad \text{のとき,} \quad G_1 : y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(x - 1)^2$$

$$b = \frac{3}{2} \quad \text{のとき,} \quad G_2 : y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 3$$

頂点が $(1, 2) \Rightarrow (3, 3)$ に動けば一致することから

G_1 を x 軸方向に 2 $\Leftarrow$ テ, y 軸方向に 3 $\Leftarrow$ ト 平行移動する.

第3問



(1) 余弦定理を利用して

$$x^2 = (\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos \theta$$

$$\therefore x^2 = 35 - 28 \cos \theta \cdots \textcircled{1} \leftarrow \boxed{\text{アイ}}$$

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\therefore x^2 = 15 + 12 \cos \theta \cdots \textcircled{2} \leftarrow \boxed{\text{ウエ}}$$

①, ② より

$$35 - 28 \cos \theta = 15 + 12 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \leftarrow \begin{array}{c} \boxed{\text{オ}} \\ \boxed{\text{カ}} \end{array}$$

$$x^2 = 21 \text{ であるから } x = \sqrt{21} \leftarrow \boxed{\text{キク}}$$

正弦定理より

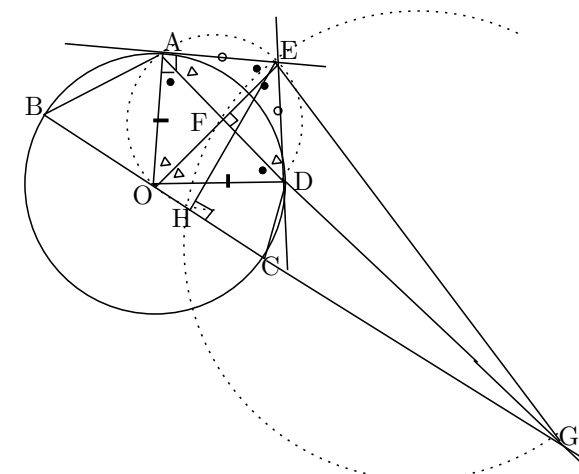
$$\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \quad \therefore R = \sqrt{7} \leftarrow \boxed{\text{ケ}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であることより}$$

四角形 ABCD = $\triangle ABC + \triangle ACD$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 5\sqrt{3} \leftarrow \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$



OA $\perp$ AE であるから, $\angle OAE = 90^\circ \leftarrow \boxed{\text{シス}}$

また, $\angle ODE = 90^\circ$ であることから, 4点 O, A, E, D は OE を直径とする円に内接している. 円周角の定理により $\angle OEA = \angle OED = \angle OAD$ また, $\angle EAD = \angle EOD$ などから

$\angle OAD + \angle DAE = 90^\circ \quad \therefore \angle AFE = 90^\circ \leftarrow \boxed{\text{セソ}}$

$\triangle AED$ は二等辺三角形であるから, $AF = FD = \sqrt{3}$

また, 方べきの定理により

$$OF \cdot FE = AF \cdot FD = 3 \quad \therefore OF(OE - OF) = 3$$

であるから

$$OF \cdot OE = OF^2 + 3$$

であり, 三平方の定理により, $OF^2 = OA^2 - AF^2 = 7 - 3 = 4$ であるから

$$OF \cdot OE = 7 \leftarrow \boxed{\text{タ}}$$

いま, $\angle EHG = \angle EFG = 90^\circ$ であることから

4点 E, G, ② H, F $\leftarrow \boxed{\text{チ}}$ は EG を直径とする円周上にある.

したがって, 方べきの定理より

$$OH \cdot OG = OF \cdot OE = 7 \leftarrow \boxed{\text{ツ}}$$

$\boxed{\text{註}}$ OA = OD (= R), AE = DE であることから

OE は線分 AD の垂直二等分線であり, $AF = FD$, かつ, $\angle AFE = 90^\circ$

(この方が簡単ですね)

第 4 問

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \longleftarrow \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \longleftarrow \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

(1) 8 回の試行で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は

$${}_8C_3 p^3 q^5 = \boxed{56} p^3 q^5 \longleftarrow \boxed{\text{オカ}}$$

1 回目に 4 以下の目が出る確率は, $p = \frac{2}{3}$ であるから, 求める確率は

$$p \times {}_7C_2 p^2 q^5 = \boxed{21} p^3 q^5 \longleftarrow \boxed{\text{キク}}$$

1 回目に 5 以上の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ であるから, 求める確率は

$$q \times {}_7C_3 p^3 q^4 = \boxed{35} p^3 q^5 \longleftarrow \boxed{\text{ケコ}}$$

(2) 前問の第 1 回目に 4 以下の目が出る場合と, 5 以上の目が出る場合は排反であるから

$${}_7C_2 + {}_7C_3 = {}_7C_5 + {}_7C_4 = 56(\quad \text{②}, \text{⑥}) \longleftarrow \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}$$

(3) 得点を X とする. $X = 6$ である確率は $q^5 p^3 = p^3 q^5 \longleftarrow \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 3 \text{ である確率は } q^2 \times p \times {}_5C_2 p^2 q^3 = \boxed{10} p^3 q^5 \longleftarrow \boxed{\text{ソタ}} \\ X = 1 \text{ である確率は } 21 p^3 q^5 \\ X = 2 \text{ である確率は } q \times p \times {}_6C_2 p^2 q^4 = 15 p^3 q^5 \\ X = 4 \text{ である確率は } q^3 \times p \times {}_4C_2 p^2 q^2 = 6 p^3 q^5 \\ X = 5 \text{ である確率は } q^4 \times p \times {}_3C_2 p^2 q = 3 p^3 q^5 \\ X = 6 \text{ である確率は } p^3 q^5 \end{array} \right.$$

それ以外の場合についての得点は 0 点であることから

求める得点 X に期待値は

$$\begin{aligned} & 1 \times 21 p^3 q^5 + 2 \times 15 p^3 q^5 + 3 \times 10 p^3 q^5 + 4 \times 6 p^3 q^5 \\ & + 5 \times 3 p^3 q^5 + 6 \times p^3 q^5 \\ & = 126 p^3 q^5 = 126 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{1}{3} \right)^5 \\ & = \frac{2^4 \times 3^2 \times 7}{3^8} = \frac{112}{729} \longleftarrow \frac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}} \end{aligned}$$

第1問 (配点 30)

[1]

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \text{ の両辺を平方して}$$

$$t^2 = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta$$

$$\therefore t^2 = 2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1 \Leftarrow \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \boxed{\text{エ}}$$

2倍角の公式を利用して

$$t^2 = 1 + (1 + \cos 2\theta) + \sqrt{3} \sin 2\theta$$

であるから

$$\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta = t^2 - 2$$

となり

$$y = t^2 - 2 - 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)$$

$$= t^2 - 2t - 2 \Leftarrow \boxed{\text{オ}}, \quad \boxed{\text{カ}}$$

また, t を合成して

$$t = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \Leftarrow \boxed{\text{キ}} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \right)$$

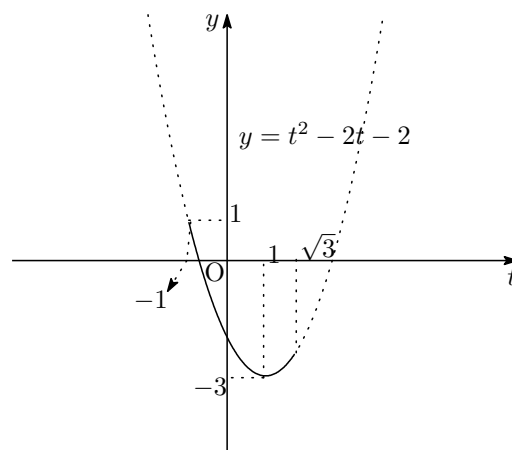
$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

であるから,

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \Leftarrow \boxed{\text{ケ}}$$

よって, t のとり得る値の範囲は

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3} \Leftarrow \boxed{\text{コサ}}, \quad \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$



グラフより

$$t = 1 \Leftarrow \boxed{\text{ス}} \text{ のとき, すなわち } \theta = -\frac{\pi}{6} \Leftarrow -\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} \text{ のとき,}$$

$$\text{最小値 } -3 \Leftarrow \boxed{\text{ソタ}}$$

[2] $\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x, \quad \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 x$ であるから, ① は

$$3(\log_2 x)^2 - \frac{7}{2} \log_2 x - 10 > 0 \iff 6X^2 - 7X - 20 > 0$$

$$\iff 6X^2 - \boxed{\text{チ}} X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

$$6X^2 - 7X - 20 = (3X + 4)(2X - 5) > 0 \iff X < -\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{2} < X$$

$$\iff X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \quad -\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

$$X = \log_2 x < -\frac{4}{3} \text{ のとき, } 0 < x < 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{5}{2} < X = \log_2 x \text{ のとき, } x > 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2} = 5.6 \dots$$

であることから, ① を満たす最小の自然数 $x = 6 \Leftarrow \boxed{\text{ネ}}$

② について, まず $x < 14$ の範囲で考える.

$$\log_3 9 = 2 \text{ であることから, } 9 + 2 < 14 \quad \therefore 9 < x < 14$$

$$x = 13, 12 \text{ のとき, } x + \log_2 x > 14 \text{ であるから, これは不適.}$$

$$x = 11 \text{ のとき, } 2 < \log_3 11 < 3 \text{ であることから, ② を満たす.}$$

したがって, ② を満たす最大の自然数 $x = 11 \Leftarrow \boxed{\text{ノハ}}$

第2問 (配点 30)

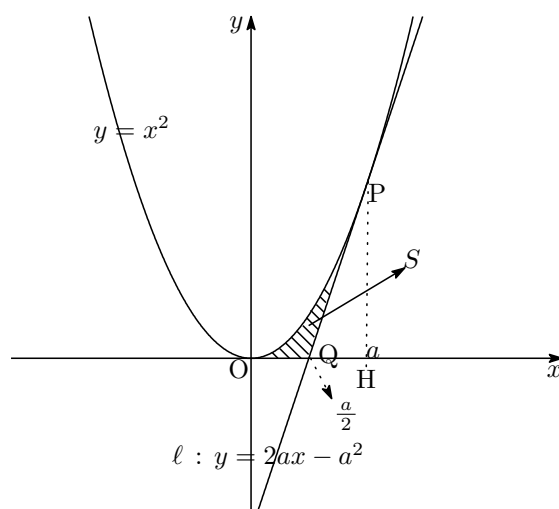
接線 ℓ の傾きは $\left[y'\right]_{x=a} = 2a$ であるから, ℓ の式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \iff y = 2ax - a^2 \iff y = \boxed{\text{アイ}} x - a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

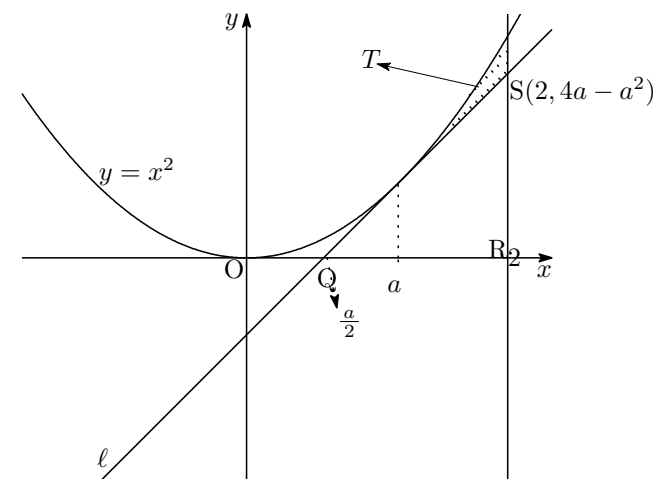
ℓ と x 軸との共有点は

$$2ax - a^2 = 0 \text{ より, } x = \frac{a}{2} \quad \therefore Q\left(\frac{a}{2}, 0\right) \leftarrow \left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \boxed{\text{カ}}\right)$$

$a > 0$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx - \triangle PQH \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{2}\right) \times a^2 \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3 = \frac{a^3}{12} \iff \frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \int_a^2 (x - a)^2 dx = \left[\frac{(x - a)^3}{3}\right]_a^2 = \frac{(2 - a)^3}{3} \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \leftarrow -\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}} + \boxed{\text{サ}} a^2 - \boxed{\text{シ}} a + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \end{aligned}$$

$$U = S + T = -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \text{ より,}$$

$$U' = -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 = -\frac{1}{4}(3a^2 - 16a + 16) = \frac{1}{4}(3a - 4)(a - 4)$$

a	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
U'		-	+	-	
U	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$\frac{8}{27}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{8}{27} \text{ であることから}$$

$$a = 0 \iff \boxed{\text{ソ}} \text{ のとき, 最大値 } \frac{8}{3} \leftarrow \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

$$a = \frac{4}{3} \leftarrow \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ のとき, 最小値 } \frac{8}{27} \leftarrow \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

第3問 (配点 20)

$$x_3 = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{3 + 1} = \frac{7}{4} \Leftarrow \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

与えられた条件より

$$x_{n+2} = \frac{x_n + 3x_{n+1}}{3 + 1} = \frac{x_n + 3x_{n+1}}{4} \dots \textcircled{1}$$

① より,

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n + 3x_{n+1}}{4} - x_{n+1} = -\frac{1}{4}(x_{n+1} - x_n)$$

$$\therefore y_1 = 1 \Leftarrow \boxed{\text{ウ}}, \quad y_{n+1} = \frac{-1}{4}y_n \Leftarrow \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

数列 $\{y_n\}$ は初項 1, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$y_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \textcircled{1} \Leftarrow \boxed{\text{キ}}$$

$n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{9}{5} - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Leftarrow \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}} \left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{サ}}=\textcircled{1}} \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k|y_k| = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 \cdot r + 3 \cdot r^2 + 4 \cdot r^3 + \dots + nr^{n-1} \\ rS_n &= 1 \cdot r + 2 \cdot r^2 + 3 \cdot r^3 + \dots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \\ \therefore S_n - rS_n &= 1 + \underbrace{1 \cdot r + 1 \cdot r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}}_{\text{初項 } 1, \text{ 公比 } r \text{ の等比数列の } (n \text{ 項の) 和}} - nr^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} - nr^n, \quad \text{シ} = \textcircled{1}, \text{ス} = \textcircled{1}$$

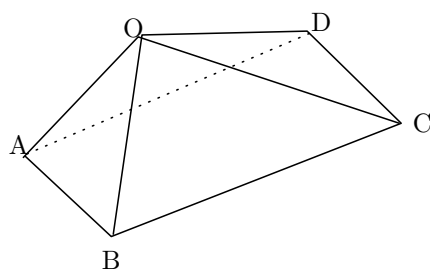
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} - n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\frac{3}{4} S_n = \frac{4}{3} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore S_n = \frac{16}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \left\{1 - \left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}=\textcircled{1}}\right\} - \frac{n}{\boxed{\text{テ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{\boxed{\text{タ}}=\textcircled{1}}$$

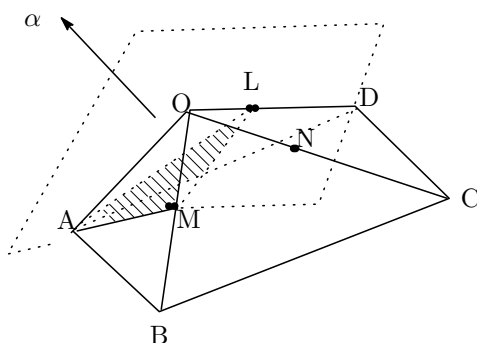
第4問 (配点 20)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} \\ &= \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \quad \mathcal{A} = a, \mathcal{I} = b\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}, \quad \Leftarrow -\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AL} + t(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{a} + s\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}s - t\right)\vec{a} + \left(-\frac{s}{3} + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftarrow \overrightarrow{ON} &= \left(\boxed{\text{キ}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s - t\right)\vec{a} \\ &\quad + \left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}} + \frac{t}{\boxed{\text{サ}}}\right)\vec{b} + \frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}\end{aligned}$$

点 N は OC 上にあるから

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}s - t = 0 \cdots \cdots \text{①} \\ -\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 0 \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①, ② より, } s = \frac{3}{4}, t = \frac{1}{2} \text{ であるから, } \overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\vec{c} \Leftarrow \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

$$\cos \angle AOB = \frac{1^2 + 1^2 - (2r)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 1 - 2r^2 \text{ であるから}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 2r^2) = 1 - 2r^2, \Leftarrow \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} r^2$$

$$\triangle OBC \text{ は } \angle BOC = 90^\circ \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftarrow \boxed{\text{チ}}$$

$$|AC| = \sqrt{4 + 4r^2} \text{ であるから, } \cos \angle AOC = \frac{1 + 3 - (4 + 4r^2)}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{-2r^2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{-2r^2}{\sqrt{3}} = -2r^2 \Leftarrow \boxed{\text{ツテ}}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \text{ であるから}$$

$$AM \perp MN \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \frac{1}{4}(\vec{c} - 2\vec{b}) \\ &= \frac{1}{8}(\vec{b} \cdot \vec{c} - 2|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 4\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= -2 + 4r^2 + 4(1 - 2r^2) \\ &= -4r^2 + 2 = 0 \text{ であるから, } r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because r > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore AB = 2r = \sqrt{2} \Leftarrow \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$$