

2004 年度 京都大 数学 (理系)

＝後期＝

2004.3.14

第 1 問

(35 点)

$x \geq 0$ に対して、関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(4nx(1-x)) dx$$

を求めよ。

第 2 問

(30 点)

複素数 z

の絶対値を $|z|$ で表す。 $\left| (1+i)t + 1 + \alpha \right| \leq 1$ を満たす実数 t が存在するような複素数 α の範囲を、複素数平面上で図示せよ。(ただし、 i は虚数単位を表す。)

第 3 問

(30 点)

平面ベクトル $\vec{x}$ に対して実数 $f(\vec{x})$ を対応させる写像 $f(\vec{x})$ が次の性質 (★) を持っている。

(★) 任意の平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して、 $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ が成り立つ。

このとき、任意の平面ベクトル $\vec{x}$ に対して、

$$f\left(\frac{1}{3}\vec{x}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{x})$$

が成り立つことを証明せよ。

第 4 問

(35 点)

水平面 V 上の 3 点を O, A, B とする。 A は線分 OB 上にあり、線分 AB の長さは 1 メートルであるとする。 O から、 V と垂直に棒が立っている。棒の先端 X を A, B から見たときの仰角がそれぞれ $45^\circ, 44^\circ$ であったという。棒の長さは何メートルか。小数点以下を四捨五入して答えよ。

ただし、 $0.01745 < \tan 1^\circ < 0.01746$ である。

第 5 問

(35 点)

n を自然数とする。次の 3 つの不等式 (1), (2), (3) をすべて満たす自然数の組 (a, b, c, d) はいくつあるか。 n を用いて表せ。

(1) $1 \leq a < d \leq n$

(2) $a \leq b < d$

(3) $a < c \leq d$

第 6 問

(35 点)

n を自然数とする。 xy 平面内の、原点を中心とする半径 n の円の、内部と周をあわせたものを C_n であらわす。次の条件 (★) を満たす 1 辺の長さが 1 の正方形の数を $N(n)$ とする。

(★) 正方形の 4 頂点はすべて C_n に含まれ、4 頂点の x および y 座標はすべて整数である。

このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n^2} = \pi$$

を証明せよ。

解答

第 1 問

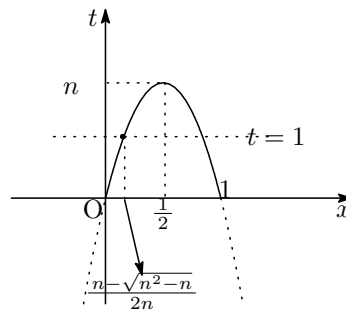
$4nx(1-x)=t$ とおくと, $t=-4n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+n$ より,

$0 \leq x \leq 1$ に対して, $0 \leq t \leq n$

$4nx^2-4nx+t=0$ より, $x=\frac{2n \pm \sqrt{4n^2-4nt}}{4n}=\frac{n \pm \sqrt{n^2-nt}}{2n}$

$x=\frac{n-\sqrt{n^2-nt}}{2n}$ のとき,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{2}(n^2-nt)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-n)}{2n}=\frac{1}{4\sqrt{n^2-nt}}$$



グラフの対称性から

$$\text{与式} = 2n \int_0^1 \frac{t}{4\sqrt{n^2-nt}} dt = \frac{n}{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{n^2-nt}} dt$$

$$\sqrt{n^2-nt}=s \text{ とおくと, } n^2-nt=s^2 \quad \therefore -n dt = 2s ds$$

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline s & n \rightarrow \sqrt{n^2-n} \end{array}$$

よって,

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{n}{2} \int_n^{\sqrt{n^2-n}} \frac{n^2-s^2}{ns} \cdot \frac{2s}{-n} ds = \frac{1}{n} \int_{\sqrt{n^2-n}}^n (n^2-s^2) ds \\ &= \frac{1}{n} \left[n^2s - \frac{s^3}{3} \right]_{\sqrt{n^2-n}}^n = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}n^3 - n^2\sqrt{n^2-n} + \frac{1}{3}(n^2-n)\sqrt{n^2-n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2n^2 - (2n+1)\sqrt{n^2-n} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4n^4 - (2n+1)^2(n^2-n)}{2n^2 + (2n+1)\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n^2+n}{2n^2 + (2n+1)\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \left(2 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(4nx(1-x)) dx = \frac{1}{4} \text{ (答)}$$

第 2 問

$\alpha = x + yi$ (x, y は実数) とおく。

$$|(1+i)t + 1 + \alpha| \leq 1 \iff \sqrt{(x+1+y)^2 + (y+t)^2} \leq 1$$

$$\iff (x+1+y)^2 + (y+t)^2 \leq 1$$

$$\iff 2t^2 + 2(x+1+y)t + (x+1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \dots\dots ①$$

① を満たす実数 t が存在するための条件は

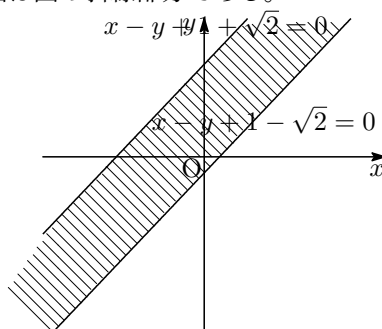
$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = (x+1+y)^2 - 2(x+1)^2 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

$$\iff (x+1)^2 - 2(x+1)y + y^2 - 2 \leq 0$$

$$\iff (x+1-y)^2 - 2 \leq 0$$

$$\iff (x-y+1+\sqrt{2})(x-y+1-\sqrt{2}) \leq 0 \dots\dots ②$$

② より, 求める α の存在範囲は図の斜線部分である。



図の斜線部分で境界を含む (答)

第 3 問

(証明)

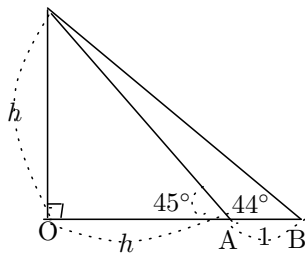
条件より,

$$f(3\vec{y}) = f(2\vec{y} + \vec{y}) = f(\vec{y}) + f(\vec{y}) + f(\vec{y}) = 3f(\vec{y})$$

$$f(\vec{y}) = \frac{1}{3}f(3\vec{y})$$

$$3\vec{y} = \vec{x} \text{ において, } f\left(\frac{1}{3}\vec{x}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{x}) \text{ (終)}$$

第 4 問



図のように、棒の長さを h メートルとおくと、

$$\tan 45^\circ = 1, \quad \tan 44^\circ = \frac{h}{1+h}$$

$$\tan 44^\circ = \tan(45^\circ - 1^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 1^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 1^\circ} = \frac{1 - \tan 1^\circ}{1 + \tan 1^\circ}$$

$$\tan 1^\circ = x \text{ とおくと, } \frac{1-x}{1+x} = \frac{h}{1+h} \text{ で,}$$

$$(2h+1)x = 1, \quad 0.01745 < x = \frac{1}{2h+1} < 0.01746$$

$$\therefore \frac{1}{0.01746} < 2h+1 < \frac{1}{0.01745} \iff 57.27\cdots < 2h+1 < 57.30\cdots$$

$$\iff 28.13\cdots < h < 28.15\cdots \quad \therefore h = 28$$

棒の長さは、28 メートル (答)

第 5 問

(1), (2), (3) の 3 条件から次の 6 つの場合が考えられる。

$$\textcircled{1} a < b < c < d \quad \textcircled{2} a < c < b < d \quad \textcircled{3} a = b < c < d$$

$$\textcircled{4} a < b = c < d \quad \textcircled{5} a < b < c = d \quad \textcircled{6} a = b < c = d$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の場合は, いずれも } {}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \quad (n \geq 4) \text{ 通り。}$$

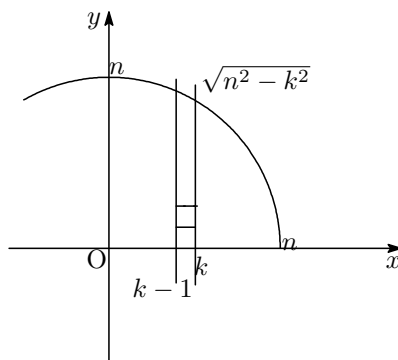
$$\textcircled{3} \sim \textcircled{5} \text{ の場合は, いずれも } {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad (n \geq 3) \text{ 通り。}$$

$$\textcircled{6} \text{ の場合は, } {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!} \quad (n \geq 2) \text{ 通り。}$$

よって、求める自然数の組 (a, b, c, d) の数は

$$\begin{aligned} & 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)\{(n-2)(n-3) + 6(n-2) + 6\}}{12} \\ &= \frac{n(n-1)(n^2+n)}{12} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 6 問
(証明)



$x \geq 0, y \geq 0$ の部分において

図のように, $x = 0 \sim x = n$ を n 等分した第 k 番目と, $k-1$ 番目についてここにある題意の正方形の個数は, $[\sqrt{n^2 - k^2}]$ 個ある。

一般的に, $[x]$ は, x を超えない最大の整数を表すものとする。

$$\sqrt{n^2 - k^2} - 1 < [\sqrt{n^2 - k^2}] \leq \sqrt{n^2 - k^2}$$

$$N(n) = 4 \times \sum_{k=1}^n [\sqrt{n^2 - k^2}]$$

$$\therefore 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2} - 1}{n^2} < \frac{N(n)}{n^2} \leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2} - 1}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

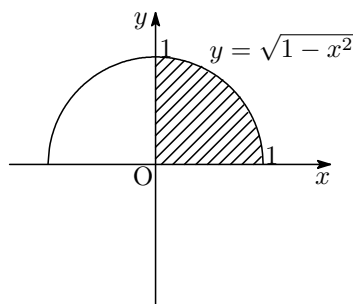
$$\text{左辺} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2} - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 4 \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\text{右辺} = \int_0^1 4\sqrt{1 - x^2} dx$$

ハサミウチの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n^2} = 4 \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx}_{\text{波線}} = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi \text{ (終)}$$



波線 の部分は, 図の斜線部の面積である。