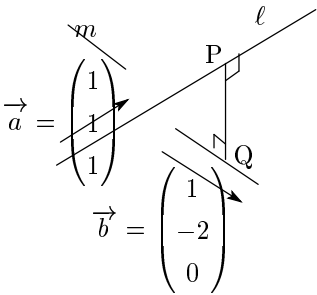


1

——今春の問題から その 1 ——
座標空間で点 $(3, 4, 0)$ を通り、ベクトル $\vec{a} = 1, 1, 1$ に平行な直線を k 、点 $(2, -1, 0)$ を通り、ベクトル $\vec{b} = (1, -2, 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は k 上を、点 Q を m 上をそれぞれ勝手に動くとき、線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

——解答例——

k 上の点 P を $(3 + s, 4 + s, s)$
 m 上の点 Q を $(2 + t, -1 - 2t, 0)$ とおくと



$$\overrightarrow{PQ} = (t - s - 1, -2t - s - 5, -s)$$

とおける。PQ を最小にするのは

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{a}, \quad \overrightarrow{PQ} \perp \vec{b}$$

のときであるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = t - s - 1 - 2t - s - 5 - s = 0 & \therefore -3s - t - 6 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{b} = t - s - 1 - 2(-2t - s - 5) = 0 & \therefore s + 5t + 9 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② より

$$t = -\frac{3}{2}, \quad s = -\frac{3}{2} \quad \therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad Q\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$$

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} //$$

2

——今春の問題から その 2 ——
四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり、1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則: 点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに、等しい確率で移動する。

このとき、 n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

——解答例——

求める確率を P_n とする。 $P_0 = 1$

$n - 1$ 秒後に、点 P が点 O にいない確率は、 $1 - P_{n-1}$ であり、そのとき、A, B, C, D の各点から 1 秒後に点 O に行く確率は等しく $\frac{1}{3}$ であるから

$$P_n = \frac{1}{3} (1 - P_{n-1}) \cdots \textcircled{1}$$

① を変形して

$$P_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(P_{n-1} - \frac{1}{4} \right)$$

であるから

$$P_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(P_0 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad (\text{答})$$

3

整数問題

$f(n) = \frac{1}{6}n^3 + an^2 + bn$ とおく。定数 a, b は $0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1$ を満たし、 $f(-1), f(1)$ はともに整数であるとする。

(1) 上の条件を満たす (a, b) の組をすべて求めよ。

(2) すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ。

—解答例—

(1)

$f(-1) = -\frac{1}{6} + a - b, f(1) = \frac{1}{6} + a + b$ で、 $0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1$ より、

$$\begin{cases} 0 \leq a + b < 2 \\ -1 < a - b < 1 \end{cases} \quad \therefore -\frac{7}{6} < f(-1) < \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6} < f(1) < \frac{13}{6}$$

$f(-1), f(1)$ はともに整数であるから、 $f(-1) = -1, 0, f(1) = 1, 2$

$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad \text{のとき, } a - b = -\frac{5}{6}, a + b = \frac{5}{6} \text{ より, } (a, b) = \left(0, \frac{5}{6}\right)$$

$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{のとき, } a - b = -\frac{5}{6}, a + b = \frac{11}{6} \quad (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) \text{ (不適)}$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad \text{のとき, } a - b = \frac{1}{6}, a + b = \frac{5}{6} \quad (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{のとき, } a - b = \frac{1}{6}, a + b = \frac{11}{6} \quad (a, b) = \left(1, \frac{5}{6}\right) \text{ (不適)}$$

以上より、 $(a, b) = \left(0, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (答)

(2) (i) $(a, b) = \left(0, \frac{5}{6}\right)$ のとき、

$$f(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n = \frac{n(n^2 + 5)}{6} = \frac{n(n^2 - 1 + 6)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n$$

~~~~~ の分子は連続3整数の積であるから6の倍数であり ~~~~~  $f(n)$  は整数である。

(ii)  $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  のとき、

$$f(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(i) と同様の形であるから、 $f(n)$  は整数である。

以上により、 $f(n)$  は整数であることが示された。(終)

4

領域

点  $(x, y)$  が連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき、 $x^2 + y^2 - 4y$  の最大値と最小値を求めよ。

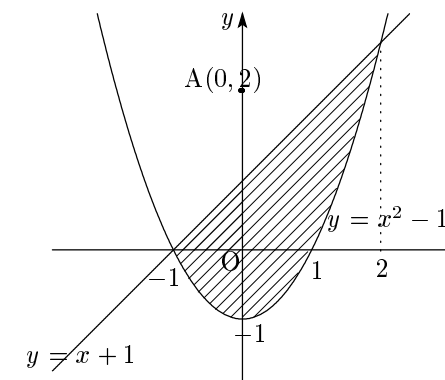
—解答例—

2つの不等式の表す領域は図の斜線部分であり、境界を含む。

$k = x^2 + y^2 - 4y = x^2 + (y - 2)^2 - 4$  とおくと  $k$  は点  $A(0, 2)$  から領域内の点までの距離を考えて、

$k$  が最小であるのは、 $A$  から直線  $y = x + 1$  までの垂線の距離を求めて、

$$\min k = \left\{ \frac{|0 - 2 + 1|}{\sqrt{2}} \right\}^2 - 4 = -\frac{7}{2}$$



$k$  が最大であるのは、 $P(t, t^2 - 1)$  ( $-1 \leq t \leq 2$ ) をとって

$$\begin{aligned} k &= AP^2 - 4 = t^2 + (t^2 - 3)^2 - 4 \\ &= \left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad (0 \leq t^2 \leq 4) \end{aligned}$$

これより、 $t^2 = 0 \iff t = 0$  のとき、最大となり最大値5である。

最大値：5， 最小値： $-\frac{7}{2}$  (答)

5

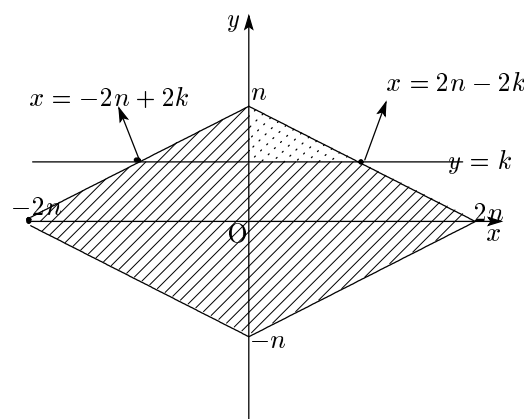
整数問題 … 格子点

$n$  を正の整数とする。不等式

$$|x| + 2|y| \leq 2n$$

を満たす整数  $x, y$  の組  $(x, y)$  は何個あるか。 $n$  で表せ。このような点  $(x, y)$  を **格子点** という。

—解答例—



不等式  $|x| + 2|y| \leq 2n$  を満たすグラフは上図である。

直線  $y = k$  ( $k \geq 0$  の整数) 上の格子点の個数は

$(2n - 2k) - (-2n + 2k) + 1 = 4n - 4k + 1$  個ある。

$k = 0$  のとき、 $4n + 1$  個であり、図形の対称性から、求める格子点の総数は

$$\begin{aligned} (4n + 1) + 2 \times \sum_{k=1}^n (4n + 1 - 4k) &= 4n + 1 + 2 \left\{ n(4n + 1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) \right\} \\ &= 4n + 1 + 2(2n^2 - n) \\ &= 4n^2 + 2n + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

6

最大値

$a, b, c$  は正の実数で、 $a + b = 1$ ,  $a^3 + b^3 + c^3 = 1$  を満たすとき

(1)  $c$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)  $a^2 + b^2 + c^2$  の最大値を求めよ。

—解答例—

(1)  $a^3 + b^3 + c^3 = 1$  より、 $(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = 1 \quad 1 - 3a(1 - a) + c^3 = 1$

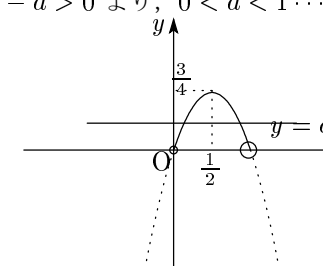
$$\therefore c^3 = 3a - 3a^2 \dots \dots \textcircled{1}$$

① の右辺を  $f(a)$  とおく。 $a > 0$  かつ、 $b = 1 - a > 0$  より、 $0 < a < 1 \dots \textcircled{2}$

①, ② よりグラフをかいて

$$0 < c^3 \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore 0 < c \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \quad (\text{答})$$



(2)  $a + b = 1$ ,  $a^3 + b^3 = 1 - c^3$  より

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - c^3, \quad \therefore ab = \frac{1}{3}c^3$$

$$\text{よって、} a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 - 2ab + c^2 = 1 - \frac{2}{3}c^3 + c^2$$

$$f(c) = -\frac{2}{3}c^3 + c^2 + 1 \quad \left( 0 < c \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \right) \text{ とおくと、}$$

$$f'(c) = -2c^2 + 2c = -2c(c - 1)$$

増減表は

|         |   |     |                              |
|---------|---|-----|------------------------------|
| $c$     | 0 | ... | $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$      |
| $f'(c)$ |   | +   |                              |
| $f(c)$  | 1 | ↗   | $\frac{2 + \sqrt[3]{36}}{4}$ |

ゆえに、 $c = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  のとき、 $a + b = 1$ ,  $ab = \frac{1}{4}$  となり

$a, b$  は方程式

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \text{ の2解で、} a = b = \frac{1}{2}$$

このとき、題意の式は **最大値** :  $\frac{2 + \sqrt[3]{36}}{4}$  をとる.(答)

7

整数問題 … 剰余

- (1)  $n$  と  $p$  を任意の自然数とすると、 $n^p$  と  $n^{p+4}$  の一位の数字は一致することを示せ。  
 (2)  $101^{50}$  の下 4 桁の数を求めよ。

—解答例—

(1) **証明**

$n^{p+4} - n^p$  が 10 の倍数であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} n^{p+4} - n^p &= n^p(n^4 - 1) = n^p(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) \\ &= n^p\{(n + 2)(n + 3) - 5n - 5\}(n - 1)(n + 1) \\ &= n^{p-1} \underbrace{(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}_{\text{連続 5 整数の積}} - n^{p-1}(n + 1) \cdot \underbrace{5(n - 1)n(n + 1)}_{5 \times \text{連続 3 整数の積}} \end{aligned}$$

以上から、 $n^{p+4} - n^p$  が 10 の倍数  $\iff n^{p+4}$ 、 $n^p$  の一位の数字は一致(終)

(2)

$$\begin{aligned} 101^{50} &= (1 + 100)^{50} \text{ を 2 項定理で展開して} \\ &= {}_{50}C_0 1^{50} + {}_{50}C_1 1^{49} \cdot 100 + {}_{50}C_2 1^{48} 100^2 + \cdots + {}_{50}C_{50} 100^{50} \\ &= 5001 + 100^2 \times \underbrace{\left\{ {}_{50}C_2 + \cdots + {}_{50}C_{50} 100^{48} \right\}}_{10000 \text{ の倍数}} \end{aligned}$$

よって求める下 4 桁の数は、 **5001** (答)

8

数列 … 漸化式

正の数からなる数列  $\{a_n\}$  が

$$(i) \quad a_1 = \frac{3}{2}$$

$$(ii) \quad \log_3 a_n - \log_3 3a_{n-1} = \log_3(n-1) - \log_3(n+1) \quad (n \geq 2)$$

をみたすとき、

(1) 一般項  $a_n$  を求めよ。

$$(2) \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k \text{ を求めよ.}$$

(京都大・改題)

—解答例—

(1) 与式を変形して

$$\log_3 \frac{a_n}{3a_{n-1}} = \log_3 \frac{n-1}{n+1} \quad \therefore \frac{a_n}{3a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} \text{ より}$$

$$(n+1)a_n = 3(n-1)a_{n-1} \cdots \textcircled{1}$$

① の両辺に  $n$  をかけて

$$\underline{n(n+1)a_n = 3(n-1)na_{n-1} \cdots \textcircled{2}}$$

② より、数列  $\{n(n+1)a_n\}$  は、公比 3、初項  $1 \cdot 2 \cdot a_1 = 3$  の等比数列。

$$\therefore n(n+1)a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \therefore a_n = \frac{3^n}{n(n+1)} \quad (\text{答})$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k = \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot \frac{3^k}{k(k+1)}$$

$$\text{ここで、} \frac{2k-1}{k(k+1)} = \frac{3}{\underbrace{k+1}} - \frac{1}{k} \text{ と変形して}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 3^k \cdot \frac{2k-1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{3^{k+1}}{k+1} - \frac{3^k}{k} \right) \\ &= \left( \frac{3^2}{2} - \frac{3}{1} \right) + \left( \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} \right) + \cdots + \left( \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} \right) \\ &= \frac{3^{n+1}}{n+1} - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k = \frac{3^{n+1}}{n+1} - 3 \quad (\text{答})$$

**註** (~~~~~)の変形がポイント)

9

整数問題 … 不定方程式

$x, y$  を正の整数とする。

(1)  $3x + 4y = 2000$  をみたす  $x, y$  の組は何通りあるか。

(2) 正の整数  $m$  が  $3x + 4y + 100$  の形で表すことのできないもののうち、最大のものを求めよ。

—解答例—

$$(1) 3x + 4y = 2000 \text{ から, } 3x = 2000 - 4y \quad \therefore x = \frac{2000 - 4y}{3} \dots \textcircled{1}$$

① より,  $x = -y + 666 + \frac{2 - y}{3}$  と変形できる。

ここで,  $x, y$  は整数であることから,  $2 - y = 3k$  ( $k$  は整数) とおける。

このとき,  $\therefore y = 2 - 3k, \quad x = 3k - 2 + 666 + k = 4k + 664$

$x, y$  は正の整数であるから,  $4k + 664 \geq 1, 2 - 3k \geq 1, \quad \therefore -\frac{663}{4} \leq k \leq \frac{1}{3}$

$k$  は整数であるから,  $-165 \leq k \leq 0 \dots \textcircled{2}$

② をみたす整数  $k$  は 166 個あり, それぞれに対して  $(x, y)$  の組が 1 対 1 に対応する。

ゆえに, 求める組の総数は **166 通り (答)**

(2)

図表を書いて調べてみよう。

| $y \backslash x$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | ...      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                | 107      | 110      | 113      | 116      | 119      | 122      | ...      |
| 2                | 111      | 114      | 117      | 120      | 123      | 126      | ...      |
| 3                | 115      | 118      | 121      | 124      | 127      | 130      | ...      |
| 4                | 119      | 122      | 125      | 128      | 131      | 133      | ...      |
| 5                | 123      | 126      | 129      | 132      | 135      | 138      | ...      |
| 6                | 127      | 130      | 133      | 136      | 139      | 142      | ...      |
| $\vdots$         | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

いま,  $y = 1$  とおくと,  $m = 3x + 104 = 3(x + 34) + 2$  となり

$x \geq 1$  より, 107 以上の 3 で割って 2 余る数はすべて表すことができる。

$y = 2$  とおくと,  $m = 3x + 108 = 3(x + 36)$ , よって 111 以上の 3 の倍数はすべて表すことができる。

$y = 3$  とおくと,  $m = 3x + 112 = 3(x + 37) + 1$ , よって 115 以上の 3 で割って 1 余る数はすべて表すことができる。

整数  $k$  ( $k \geq 1$ ) に対して,  $y = 3(k - 1) + 1, 3(k - 1) + 2, 3k$  はそれぞれ,  $y = 1, 2, 3$  に 1 対 1 に対応する。

よって, 図表の上の 3 行を調べて, 求める最大数は **112 (答)**

10

図形問題

三角形 ABC の重心 G を通る直線が辺 AB, AC と交わるとき, それらの交点を D, E とする。

$$\frac{AD}{AB} = x, \quad \frac{AE}{AC} = y \text{ とおくと,}$$

(1)  $x$  と  $y$  の間の関係式を求めよ。

$$(2) \frac{DB}{AD} + \frac{EC}{AE} = 1 \text{ を示せ.}$$

—解答例—

(1)

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c} \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{AD} = x \vec{b}, \overrightarrow{AE} = y \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

E は DG 上にあるから,

$$\overrightarrow{AE} = x \vec{b} + t \left( \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - x \vec{b} \right)$$

$$\therefore y \vec{c} = \left( x - tx + \frac{t}{3} \right) \vec{b} + \frac{t}{3} \vec{c}$$

$\vec{b}, \vec{c}$  は一次独立であるから

$$\therefore \begin{cases} x - tx + \frac{t}{3} = 0 \dots \textcircled{1} \\ y = \frac{t}{3} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② より,  $t = 3y$  で① から,  $x - 3xy + y = 0$

$$x, y \neq 0 \text{ であるから, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \text{ (答)}$$

(2) (1) より,

$$\frac{DB}{AD} + \frac{EC}{AE} = \frac{1 - x}{x} + \frac{1 - y}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 = 1 \text{ (終)}$$

別解

直線 DE の延長と直線 BC の延長の交点を F とする。(上図)

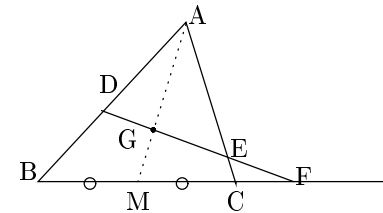
CF =  $\ell$ , BM =  $k$  において, メネラウスの定理より

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FM} \cdot \frac{MG}{GA} = 1 \quad \therefore \frac{DB}{AD} = \frac{2k + \ell}{\ell + k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ell + 2k}{2(\ell + k)} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{MF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1 \quad \therefore \frac{CE}{EA} = \frac{\ell}{2(\ell + k)} \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より

$$\frac{DB}{AD} + \frac{EC}{AE} = \frac{(\ell + 2k) + \ell}{2(\ell + k)} = \frac{2(\ell + k)}{2(\ell + k)} = 1 \text{ (終)}$$



11

整数問題…格子点

- (1)  $xy$  平面において、 $O(0, 0)$ ,  $A(5n, 0)$ ,  $B(0, 4n)$  とおく. ここで  $n$  は正の整数とする.
- ① 線分  $AB$  上の格子点はいくつあるか.
- ② 三角形  $OAB$  の内部および周上の格子点は全部でいくつあるか.
- (2)  $xyz$  空間において、 $x + y + z = n$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  をみたす格子点は全部でいくつあるか.

—解答例—

(1)

- ① 線分  $AB$  の式は  
 $y = -\frac{4}{5}x + 4n$  と表される.  
 $y$  は  $0$  以上の整数であるから,  
 $x = 5k$  ( $k \geq 0$ ) また、 $y = 4n - 4k \geq 0$  より,  
 $0 \leq k \leq n$  よって、求める格子点の個数は  
 $n + 1$ (答)

② 点  $C(5n, 4n)$  をとると

四角形  $OACB$  の内部および周上の格子点の個数は

$(5n + 1)(4n + 1)$

であるから、三角形  $OAB$  の内部および周上の格子点の個数は、線分  $AB$  上の格子点を考えて

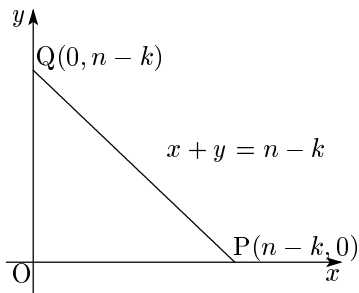
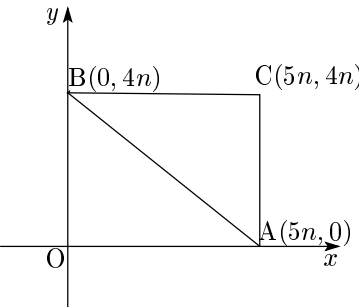
$$\frac{(5n + 1)(4n + 1) - (n + 1)}{2} + (n + 1) = 10n^2 + 5n + 1 \quad (\text{答})$$

(2)

$x + y + z = n$  で、 $z = k$  とおくと  
 $x + y = n - k \quad \therefore y = n - k - x$   
 $y \geq 0$  より、 $x = n - k - x \geq 0$  ( $k \geq 0$ )  
 $\therefore 0 \leq x \leq n - k$  より、線分  $PQ$  上には  
 $n - k + 1$  個の格子点が存在する.  
よって、求める格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^n (n - k + 1) = (n + 1)^2 - \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad (\text{答})$$



**別解**  $x + y + z = n$  をみたす  $0$  以上の整数解の組の個数であるから

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}$$

12

図形問題…最大最小

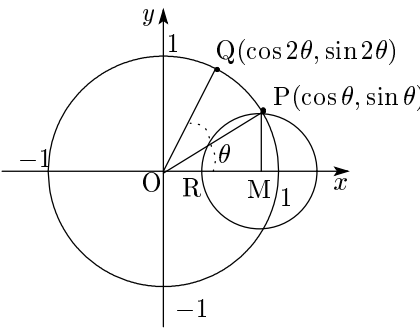
- 円  $x^2 + y^2 = 1$  上に  $2$  点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $Q(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$  がある。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  とする。  
 $P$  から  $x$  軸へ下ろした垂線の足を  $M$  とし、中心  $M$ 、半径  $MP$  の円と  $x$  軸との交点のうち、 $O$  に近い方を  $R$  とする。
- (1)  $t = \cos \theta - \sin \theta$  とするとき、 $t$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $\triangle OQR$  の面積  $S$  の最大値を求めよ。

—解答例—

(1)

$$t = \sqrt{2} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  より、  
 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$   
 $\therefore 0 < t < 1$  (答)



(2)

$R(\cos \theta - \sin \theta, 0)$  であるから

$$S = \frac{1}{2} \times (\cos \theta - \sin \theta) \sin 2\theta$$

$$= \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$t^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \text{ より}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\therefore S = \frac{t(1 - t^2)}{2}, \quad \therefore S' = \frac{1 - 3t^2}{2}$$

増減表を書いて ( $0 < t < 1$  であることより)

|      |   |            |                      |            |   |
|------|---|------------|----------------------|------------|---|
| $t$  | 0 | ...        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ...        | 1 |
| $S'$ |   | +          | 0                    | -          |   |
| $S$  |   | $\nearrow$ | 最大                   | $\searrow$ |   |

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき、最大値： $\frac{\sqrt{3}}{9}$  (答)

13

図形問題・・・総合

単位円  $x^2 + y^2 = 1$  に直線  $px + qy = 1$  ( $p > 0, q > 0$ ) が接しているとする。この接線と  $x$  軸,  $y$  軸とで囲まれた三角形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を  $V$  とする。接線をいろいろ変えたときの  $V$  の最小値を求めよ。またそのときの接点の座標を求めよ。

—解答例—

直線  $px + qy = 1$  は点  $P(p, q)$  において,

円  $x^2 + y^2 = 1$  に接している。

$y = 0, x = 0$  において  $x, y$  軸との交点は

$A\left(\frac{1}{p}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{q}\right)$  である. ( $p, q > 0$ )

題意の回転体は  $OA$  を半径,  $OB$  を高さとする

円錐であるから, 体積を  $V$  とおくと

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{p}\right)^2 \frac{1}{q}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{p^2 q} \cdots \textcircled{1}$$

$p^2 + q^2 = 1$  かつ,  $p > 0, q > 0$  から,  $0 < q < 1 \cdots \textcircled{2}$

ここで,  $p^2 q = (1 - q^2) q = f(q)$  とおく

$\textcircled{2}$  の範囲で  $V$  が最大となる場合を調べる。

$$f'(q) = 1 - 3q^2 = -3\left(q + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(q - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

増減表をかいて

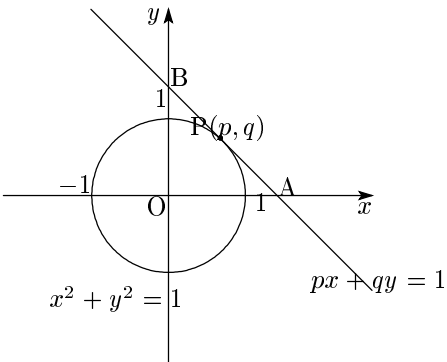
|         |   |     |                      |     |   |
|---------|---|-----|----------------------|-----|---|
| $q$     | 0 | ... | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ... | 1 |
| $f'(q)$ |   | +   | 0                    | -   |   |
| $f(q)$  |   |     | ↗ 最大 ↘               |     |   |

よって,  $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき,  $f(q)$  は最大である。

このとき,  $p = \frac{\sqrt{6}}{3}$  で  $f(q)$  の最大値は  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

したがって,  $V$  の最小値は  $\frac{1}{3}\pi \times \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$$\therefore \underline{\underline{\text{最小値} : \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}, \quad \underline{\underline{\text{接点は} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}} \quad (\text{答})$$



14

場合の数

$1, 2, 3, \dots, \dots, n$  ( $n \geq 7$ ) の  $n$  個から 3 個の数を取り出すとき, どの 2 つの数の差の絶対値も 3 以上であるという. このような取り出し方は何通りあるか.

—解答例—

解 1

2 数の差の絶対値が 3 以上であることから,  $n$  個の数から 4 個のスペースを取り去って

残り  $n - 4$  個から 3 個のものを取り出せばよい.

$$\therefore {}_{n-4}C_3 = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{6} \quad (\text{答})$$

解 2

3 数を  $i, j, k$  ( $i < j < k$ ) を考える。

$j$  ( $4 \leq j \leq n - 3$ ) を決めると,  $i$  は  $j - 3$  通りの取り方があり,  $k$  の選び方は  $n - (j + 3) + 1 = n - 2 - j$  通り。

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{j=4}^{n-3} (j-3)(n-j-2) &= 1 \cdot (n-6) + 2 \cdot (n-7) + \cdots + (n-6) \cdot 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-6} k(n-k-5) = (n-5) \frac{1}{2} (n-6)(n-5) - \frac{1}{6} (n-6)(n-5)(2n-11) \\ &= \frac{1}{6} (n-6)(n-5)\{3(n-5) - (2n-11)\} \\ &= \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

15

確率…その1

ある硬貨を投げるとき、表と裏がおのおの確率  $\frac{1}{2}$  で出るものとする。

この硬貨を8回繰り返して投げ、 $n$  回目に表が出れば  $X_n = 1$ 、裏が出れば  $X_n = -1$  とし、

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (1 \leq n \leq 8)$$

とおく。このとき次の確率を求めよ。

(1)  $S_2 \neq 0$  かつ、 $S_8 = 2$  となる確率

(2)  $S_4 = 0$  かつ、 $S_8 = 2$  となる確率

(東京大)

—解答例—

(1)  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (1 \leq n \leq 8)$

に対して、題意より  $S_2 \neq 0$  かつ、 $S_8 = 2$  となるのは

(i)  $X_1 = X_2 = 1$ ;  $X_3, X_4, \dots, X_8$  の3つが1

であるか、または

(ii)  $X_1 = X_2 = -1$ ;  $X_3, X_4, \dots, X_8$  のひとつが-1

の場合である。

$$\text{前者の確率は} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{2^7}$$

$$\text{後者の確率は} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{2^7}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{10}{2^7} + \frac{3}{2^7} = \frac{13}{128} \quad (\text{答})$$

(2)  $S_4 = 0$  かつ、 $S_8 = 2$  となるのは

$X_1, X_2, X_3, X_4$  の2つが-1

かつ、 $X_5, X_6, X_7, X_8$  の1つが-1

の場合である。よって、求める確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{32} \quad (\text{答})$$

16

求積問題 (得体の知れない立体の体積)

$xyz$  空間において、不等式

$$0 \leq z \leq 1 + x + y - 3(x - y)y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq y + 1$$

のすべてを満たす  $x, y, z$  を座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

(東京大)

—解答例—

(立体をイメージするのは????であるが)

この立体を平面  $y = k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) で切ったときの断面を考える。

$$0 \leq z \leq (1 - 3k)x + (3k^2 + k + 1) \quad (k \leq x \leq k + 1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

右辺を  $x$  の一次関数と考える。

$$3k^2 + k + 1 = 3 \left(k + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0$$

$1 - 3k \geq 0, \leq 0$  のいかんに関わらず、 $\textcircled{1}$  は次の図のようになる。

斜線部分の面積を  $S(k)$  とすると

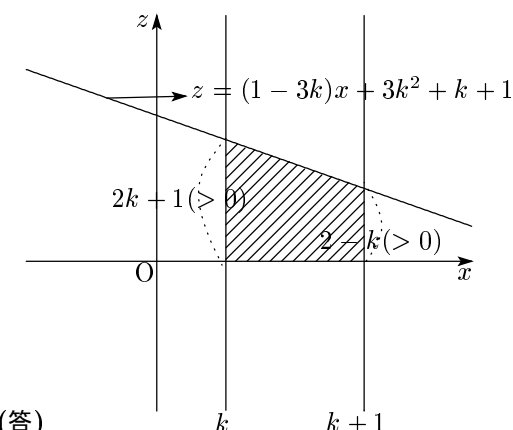
$k \leq x \leq k + 1$  のとき、 $z > 0$  であるから

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2} \cdot \{(2k + 1) + (-k + 2)\} \\ &= \frac{1}{2} (k + 3) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{体積 } V = \int_0^1 S(k) dk$$

$$= \int_0^1 \frac{k + 3}{2} dk$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{k^2}{2} + 3k \right]_0^1 = \frac{7}{4} \quad (\text{答})$$



17

確 率 その 2

さいころを  $n$  回続けて投げるとき、 $k$  回目に出る目の数を  $X_k$  とし、

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

とする。 $Y_n$  が 7 で割り切れる確率を  $p_n$  とする。

(1)  $p_n$  を  $p_{n-1}$  を用いて表せ。

(2)  $p_n$  を求めよ。

—解答例—

(1)

$Y_n$  が 7 で割り切れるとき、次の各場合が考えられる。

|                      |   |   |   |   |   |   |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{n-1}$ を 7 で割った余り | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $X_n$                | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$$Y_{n-1} \equiv 1, 2, 3, \cdots, 6 \pmod{7}$$

に対して、それぞれ対応する  $X_n$  の値は決まるから、

$$\underline{\underline{p_n = \frac{1}{6} \left( 1 - p_{n-1} \right) \text{ (答)}}}$$

(2)

(1) を変形して、

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{7} &= -\frac{1}{6} \left( p_{n-1} - \frac{1}{7} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{6} \right)^2 \left( p_{n-2} - \frac{1}{7} \right) \\ &= \cdots = \left( -\frac{1}{6} \right)^{n-1} \left( p_1 - \frac{1}{7} \right) \\ &= -\frac{1}{7} \left( -\frac{1}{6} \right)^{n-1} \quad (\because p_1 = 0) \\ \therefore \underline{\underline{p_n = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\} \text{ (答)}}} \end{aligned}$$

18

図形・領域

平面上の直線

$$y = 2(\sin \theta + \cos \theta)x - 1 - \sin 2\theta$$

を  $l_\theta$  とする。ここで  $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$  を満たす実数とする。

(1)  $a = \cos \theta + \sin \theta$  とするとき、 $a$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $\theta$  を動かすとき直線  $l_\theta$  が通る点全体の集合を  $D$  とする。 $D$  を図示せよ。

—解答例—

(1)

$$a = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \text{ と変形して}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi \text{ であるから, } \quad \underline{\underline{0 \leq a \leq \sqrt{2} \text{ (答)}}}$$

(2)

$a = \cos \theta + \sin \theta$  より、

$$a^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta \quad \therefore \sin 2\theta = a^2 - 1$$

よって、 $l_\theta$  の式は

$$y = 2ax - 1 - (a^2 - 1) \quad \therefore a^2 - 2xa + y = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ とおける.}$$

① を満たす  $a$  が  $0 \leq a \leq \sqrt{2}$  に少なくとも一つ存在する条件を求める。

いま、 $f(a) = a^2 - 2xa + y$  とおく。

(ア) 一つ存在するとき (両端を通るときも含む)

$$f(0) \cdot f(\sqrt{2}) = y(2 - 2\sqrt{2}x + y) \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

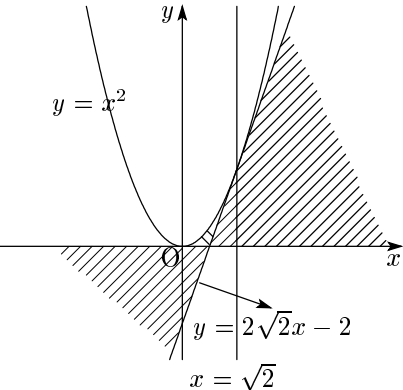
(イ) 二つ存在するとき

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = x^2 - y \geq 0 \quad \therefore y \leq x^2 \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{軸 } a = x \text{ より, } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \cdots \textcircled{4}$$

$$f(0) = y \geq 0, \quad f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}x + y \geq 0 \cdots \textcircled{5}$$

② と、③ ~ ⑤ より、求める範囲は図の斜線部分 (境界を含む) (答)



19

整数問題… 論証

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  がすべて整数であるとき

$$S = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_n - x_1|$$

は偶数であることを示せ。

(新作問題演習)

—解答例—

解 1

$$|x_i - x_j| = \pm(x_i - x_j) \quad \text{であるから,} \quad |x_i - x_j| \equiv x_i - x_j \pmod{2}$$

$$|x_1 - x_2| \equiv x_1 - x_2, \quad |x_2 - x_3| \equiv x_2 - x_3, \dots, |x_n - x_1| \equiv x_n - x_1 \pmod{2}$$

より,

$$S \equiv (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_1) \equiv 0$$

よって,  $S$  は偶数である. (終)

解 2

$$\begin{aligned} S^2 &= \left\{ |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_n - x_1| \right\}^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 \\ &\quad + 2\{|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, \dots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1| \text{ の異なる 2 項の積の和} \} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1) \\ &\quad + 2\{|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, \dots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1| \text{ の異なる 2 項の積の和} \} \end{aligned}$$

よって,  $S^2$  は偶数で,  $S$  も偶数. (終)

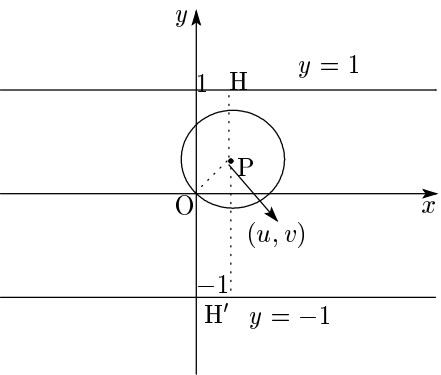
20

図形問題

$xy$  平面内の  $-1 \leq y \leq 1$  で定められる領域  $D$  と, 中心が  $P$  で原点  $O$  を通る円  $C$  を考える。 $C$  が  $D$  に含まれるという条件のもとで,  $P$  が動きうる範囲を図示し, その面積を求めよ。

(京都大)

—解答例—



$P(u, v)$  とおき,  $P$  から下ろした垂線のと 2 直線  $y = \pm 1$  の交点をそれぞれ  $H, H'$  とおくとき, 次の条件を満たすことが必要十分である.

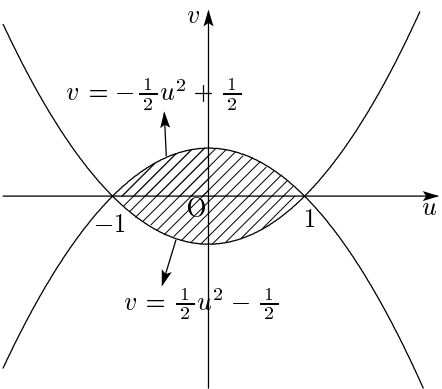
$$\begin{cases} OP \leq PH \iff \sqrt{u^2 + v^2} \leq |1 - v| \cdots \textcircled{1} \\ OP \leq PH' \iff \sqrt{u^2 + v^2} \leq |-1 - v| \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から

$$v \leq -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2} \quad \text{かつ,} \quad v \geq \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

求める図形の面積は図の通り.

$$\begin{aligned} &\therefore 2 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2} \right) du \\ &= 2 \int_0^1 (1 - u^2) du \\ &= 2 \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



21

整数問題・・・不等式

$a, b, c$  は、 $1 < a < b < c$  を満たす整数とし、 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$  は  $abc$  で割り切れるとする。

- (1)  $ab+bc+ca-1$  は、 $abc$  で割り切れることを示せ。  
 (2)  $a, b, c$  を求めよ。

—解答例—

(1)

$$\begin{aligned}(ab-1)(bc-1)(ca-1) &= a^2b^2c^2 - ab^2c - abc^2 - a^2bc + (ab+bc+ca) - 1 \\ &= \underline{(abc)^2 - abc(a+b+c)} + \underbrace{(ab+bc+ca) - 1}\end{aligned}$$

左辺は  $abc$  で割り切れ、\_\_\_\_\_ 部分も  $abc$  で割り切れる。

よって、~~~~~ 部分  $ab+bc+ca-1$  も  $abc$  で割り切れる。(終)

(2)

まず、 $ab+bc+ca-1 \geq abc$  なることが必要である。

両辺を  $abc$  で割ると

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} \geq 1$$

$$1 < a < b < c \text{ から, } \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad \therefore \frac{3}{a} - \frac{1}{abc} > 1 \cdots \textcircled{1}$$

① より

$$(3-a)bc > 1 \text{ で, } 3-a > 0 \text{ から, } a=2 \quad (\because 1 < a < 3)$$

$$a=2 \text{ のとき, } 2b+bc+2c-1 \geq 2bc \quad \therefore (b-2)(c-2) \leq 3 \cdots \textcircled{2}$$

$$2 < b < c, \quad b-2 < c-2 \leq 3 \text{ であるから, } b-2=1 \quad \therefore b=3$$

このとき、 $c-2=2, 3$  から、 $c=4$  または、 $c=5$  の2つの場合がある。

$(a, b, c) = (2, 3, 4)$  のとき、

$ab+bc+ca-1=25$  となり、 $abc=24$  で割り切れずに不適。

$(a, b, c) = (2, 3, 5)$  のとき、

$ab+bc+ca-1=30$  となり、 $abc=30$  で割り切れ題意に適する。

よって、求める  $(a, b, c)$  の組は

$$(a, b, c) = (2, 3, 5) \text{ (答)}$$

22

数列・・・不等式

数列  $\{x_n\}$  を

$$x_n = -an^2 + bn + c, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、次の2つの条件 (A), (B) を満たす自然数  $a, b, c$  を求めよ。

(A)  $4, x_1, x_2$  はこの順で等差数列である。

(B) すべての自然数  $n$  に対して、 $\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq x_n x_{n+1} + 1$  が成り立つ。

—解答例—

(A) より、 $2x_1 = x_2 + 4$

$x_1 = -a + b + c, \quad x_2 = -4a + 2b + c$  であるから、

$$-2a + 2b + 2c = -4a + 2b + c + 4, \quad \therefore 2a + c = 4$$

$a, c$  は自然数であるから、 $a=1, c=2$

$$(B) \text{ より, } \left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq 1$$

$$\text{ここで, } x_n - x_{n+1} = -n^2 + bn + 2 - \{-(n+1)^2 + b(n+1) + 2\} = 2n + 1 - b$$

ゆえにすべての自然数  $n$  に対して

$$\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq 1 \iff |2n + 1 - b| \geq 2$$

$b \geq 2$  のとき、 $|2n + 1 - b| \leq 1$  を満たす自然数  $n$  が存在して、不適。

$$\therefore b=1$$

以上から、 $a=1, b=1, c=2$  (答)

23

不等式

$a, b, c$  を正の数とするととき、不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$$

が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立するのはどんな場合か。

—解答例—

**証明**

$\sqrt[3]{c}=t\ (>0)$  とおく。

右辺－左辺  $=t^3-3\sqrt[3]{ab}t+2\sqrt{ab}$  を  $f(t)$  とする。

$$f(t)=t^3-\sqrt[3]{ab}t+2\sqrt{ab}$$

$$f'(t)=3t^2-3\sqrt[3]{ab}=3(t+\sqrt[6]{ab})(t-\sqrt[6]{ab})$$

増減表をかいて

|         |   |            |                |            |
|---------|---|------------|----------------|------------|
| $t$     | 0 | ...        | $\sqrt[6]{ab}$ | ...        |
| $f'(t)$ |   | －          | 0              | ＋          |
| $f(t)$  |   | $\searrow$ | 最小             | $\nearrow$ |

したがって、 $t=\sqrt[6]{ab}$  のとき最小となり

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(\sqrt[6]{ab}) \\ &= \sqrt{ab}-3(\sqrt[6]{ab})^2\sqrt[6]{ab}+2\sqrt{ab} \\ &= 3\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}=0 \end{aligned}$$

よって、 $t>0$  のとき、 $f(t)\geq 0$  が成立する。

等号が成立するのは、

$$t=\sqrt[6]{ab}\iff \sqrt[3]{c}=\sqrt[6]{ab}\text{ より、 }c=\sqrt{ab}\text{ のときである。}$$

$$\therefore 2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\quad (c=\sqrt{ab}\text{ のとき等号成立) \quad (終)}$$

24

求積問題

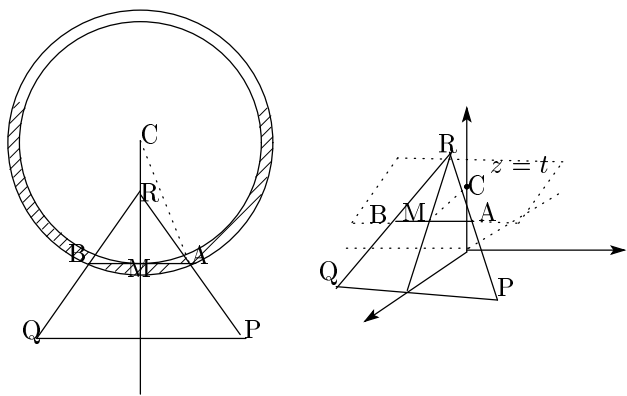
空間内に、3点

$$P\left(1,\frac{1}{2},0\right),\quad Q\left(1,-\frac{1}{2},0\right),\quad R\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

を頂点とする正三角形の板  $S$  がある。

$S$  を  $z$  軸のまわりに1回転させたとき、 $S$  が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

—解答例—



$$\text{直線 PR,QR は、}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+\ell\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

平面  $z=t$  で切ったときの切り口を  $AB$  とすると、 $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell=t$  より、 $\ell=\frac{4}{\sqrt{3}}t$

$$\therefore A\left(1-\sqrt{3}t,\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}t,t\right),\quad B\left(1-\sqrt{3}t,-\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}t,t\right)$$

$AB$  の中点  $M(1-\sqrt{3}t,0,t)$

$$\text{ここで切断面の面積 }S(t)=\pi(CA^2-CM^2)=\pi AM^2=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2$$

よって求める図形の体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2 dt \\ &= \pi \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{48} \pi \text{ (答)} \end{aligned}$$

25

図形問題・・・最小値

原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円  $C$  上に  $2$  点  $P, Q$  をとる。 $\angle POQ$  が直角であるように点  $P$  が第  $1$  象限を、点  $Q$  が第  $2$  象限を動くとき、点  $P$  における  $C$  の接線、点  $Q$  における  $C$  の接線、および  $x$  軸が囲む三角形を考える。この三角形の面積が最小になるのはどのような場合か。またその最小値を求めよ。

—解答例—

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  において、条件から

$P(\cos \theta, \sin \theta), Q(-\sin \theta, \cos \theta)$  とおく。

$P, Q$  における接線の方程式は

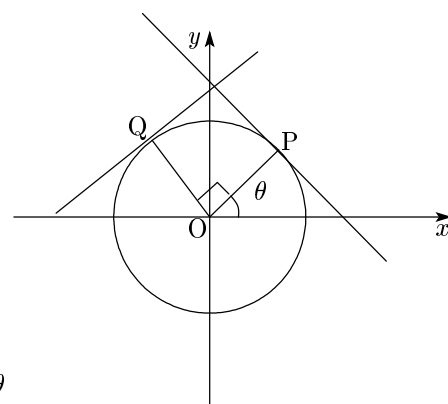
$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \cdots ① \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = 1 \cdots ② \end{cases}$$

①, ② と  $x$  軸との交点の  $x$  座標は

$y = 0$  において

$$x = \frac{1}{\cos \theta}, x = -\frac{1}{\sin \theta}$$

また、①, ② の交点の  $y$  座標は  $y = \sin \theta + \cos \theta$



題意の三角形の面積を  $S$  とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \right) (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1 + \sin 2\theta}{\sin 2\theta} \\ \therefore S &= \frac{1}{\sin 2\theta} + 1 \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ から, } 0 < 2\theta < \pi \quad \therefore 0 < \sin 2\theta \leq 1$$

$$\therefore S \geq 2$$

ゆえに、 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき、最小値:  $2$  をとる。

題意の三角形は、**直角二等辺三角形で面積の最小値は  $2$  (答)**

26

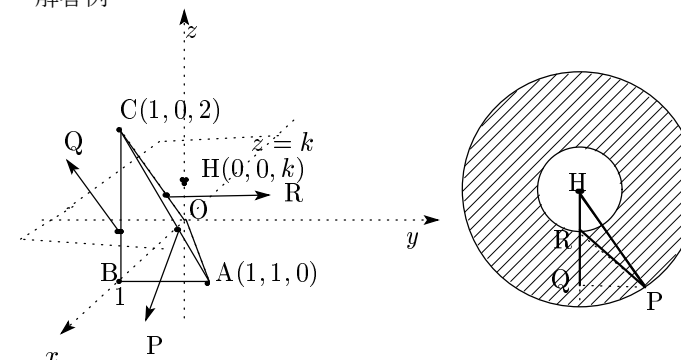
図形問題・・・求積

$xyz$  空間において、 $O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(1, 0, 0), C(1, 0, 2)$  を  $4$  頂点とする四面体  $OABC$  を考える。

(1) この四面体を平面  $z = k$  ( $0 \leq k \leq 2$ ) で切った切り口の三角形の頂点の座標を求めよ。

(2) 面  $OAB$  を平面  $z = 0$  上においたまま、また頂点  $O$  を原点に保ったまま  $z$  軸のまわりにこの四面体を回転する。このとき四面体が通過する部分の体積を求めよ。

—解答例—



(1)

まず、切り口の  $3$  点を左図のように  $P, Q, R$  とおく。

直線  $OC, AC$  の式はそれぞれ、

$$z = 2x \ (y = 0), \quad (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(0, 1, -2) \ (t \text{ は実数}) \text{ とおける。}$$

平面  $z = k$  とおくと、 $t = -\frac{k}{2}$  であることなどから

$$R\left(\frac{k}{2}, 0, k\right), P\left(1, 1 - \frac{k}{2}, k\right)$$

また、 $BC$  との交点  $Q$  は、 $(1, 0, k)$

以上より、求める三角形の  $3$  つの頂点は、

$$P\left(1, 1 - \frac{k}{2}, k\right), \quad Q(1, 0, k), \quad R\left(\frac{k}{2}, 0, k\right) \text{ (答)}$$

(2)

回転体の平面  $z = k$  での断面図は、右図の斜線部分である。その断面積は

$$S(k) = \pi(HP^2 - HR^2) = \pi\left\{1^2 + \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right\} = \pi(2 - k)$$

よって求める回転体の体積は

$$V = \pi \int_0^2 S(k) dk = \pi \int_0^2 (2 - k) dk = \pi \left[2k - \frac{k^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi \text{ (答)}$$

27

極値

3次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  は極大値と極小値をもち、それらを区間  $-1 \leq x \leq 1$  でとるものとする。この条件を満たすような実数の組  $(a, b)$  の範囲を  $ab$  平面上に図示しなさい。

—解答例—

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \cdots \textcircled{1}$  とおく。

題意を満たす条件は、 $\textcircled{1}$  が  $-1 \leq x \leq 1$  に異なる2実解をもつことである。

$$\therefore \begin{cases} \frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0 \cdots \textcircled{2} \\ \text{軸} -1 < -\frac{a}{3} < 1 \cdots \textcircled{3} \\ f(-1) \geq 0, \quad f(1) \geq 0 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{3}$  から、

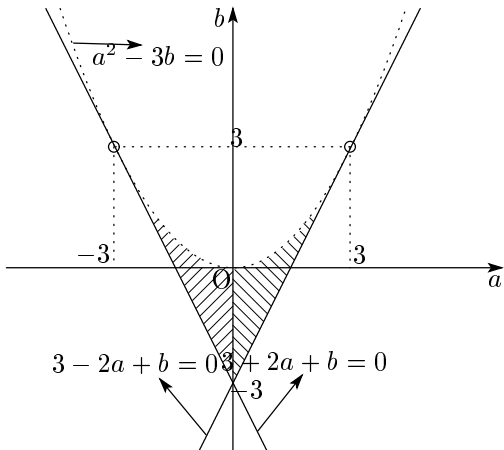
$$-3 < a < 3 \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$  から、

$$3 - 2a + b \geq 0, \quad 3 + 2a + b \geq 0 \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{5}$ ,  $\textcircled{6}$  から

求める領域は図の斜線部分で、境界は直線部分は含み、○印、放物線は含まない。(答)



28

三角関数

$0 < x < \frac{\pi}{4}$  を満たすすべての  $x$  に対して、不等式

$$\sin 3x + t \sin 2x > 0$$

が成り立っているとする。このとき  $t$  の値の範囲を求めよ。

—解答例—

与式を変形して、

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2t \sin x \cos x > 0 \quad \therefore \sin x (3 - 4 \sin^2 x + 2t \cos x) > 0$$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$  であるから、 $\sin x > 0$

$$\therefore 3 - 4 \sin^2 x + 2t \cos x > 0 \iff 4 \cos^2 x + 2t \cos x - 1 > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\cos x = X$  とおく。

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ より, } \frac{1}{\sqrt{2}} < X < 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$  より、 $f(X) = 4X^2 + 2tX - 1$  で、 $f(0) = -1 < 0$  であるから

$\textcircled{2}$  のときに、 $f(X) > 0$  が成り立つ条件は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \sqrt{2}t - 1 \geq 0$$

よって求める  $t$  の範囲は

$$\underline{\underline{t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}}} \text{ (答)}$$

29

空間

空間に異なる4点 O, P, Q, R があり,

$$\angle \text{ROP} = \angle \text{OPQ} = \angle \text{PQR} = \angle \text{QRO} = \frac{\pi}{2}$$

を満たしている。このとき, O, P, Q, R は同一平面上にあることを示せ。

—解答例—

$\angle \text{ROP} = \frac{\pi}{2}$  から

右図のように座標系を考える。ここで, 点 Q が  $xy$  平面上にあることを示せばよい。

O(0, 0, 0), P(a, 0, 0), R(0, b, 0), Q(u, v, w) とおく。

$\overrightarrow{\text{OP}} = (a, 0, 0), \overrightarrow{\text{PQ}} = (u - a, v, w),$

$\overrightarrow{\text{RQ}} = (u, v - b, w), \overrightarrow{\text{OR}} = (0, b, 0)$

条件から

$$\begin{aligned} \angle \text{OPQ} = \frac{\pi}{2} &\iff \overrightarrow{\text{PQ}} \cdot \overrightarrow{\text{PQ}} = 0 \\ &\iff a(u - a) = 0 \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle \text{PQR} = \frac{\pi}{2} &\iff \overrightarrow{\text{PQ}} \cdot \overrightarrow{\text{RQ}} = 0 \\ &\iff (u - a, v, w) \cdot (u, v - b, w) = 0 \\ &\iff u(u - a) + v(v - b) + w^2 = 0 \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle \text{QRO} = \frac{\pi}{2} &\iff \overrightarrow{\text{QR}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}} = 0 \\ &\iff b(v - b) = 0 \cdots \cdots \text{③} \end{aligned}$$

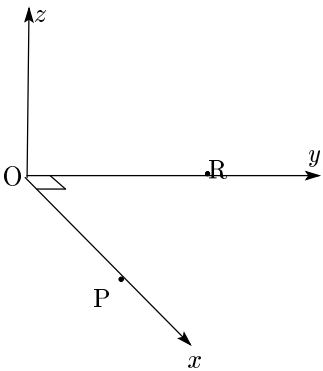
① において, P ≠ O より,  $a \neq 0 \quad \therefore u = a$

③ において, R ≠ O より,  $b \neq 0 \quad \therefore v = b$

またこのとき, ② から,  $w = 0$

よって, Q(a, b, 0) と表され, 点 Q は  $xy$  平面上にある。

ゆえに, 4点 O, P, Q, R は同一平面上にある。(終)



30

接線の数

曲線  $C: y = x^3 - x + 6$  に対して点 (a, 0) ( $a > 0$ ) から  $C$  へ3本の接線が引けるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

—解答例—

$y' = 3x^2 - 1$  から,  $\left[ y' \right]_{x=t} = 3t^2 - 1$

よって,  $x = t$  における接線の方程式は

$y - (t^3 - t + 3) = (3t^2 - 1)(x - t) \quad \therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 6 \cdots \cdots \text{①}$

① が点 (a, 0) を通るから

$(3t^2 - 1)a - 2t^3 + 6 = 0 \quad \therefore 2t^3 - 3at^2 + a - 6 = 0 \cdots \cdots \text{②}$

ここで, ② が異なる3つの実数解をもつことが必要十分である。

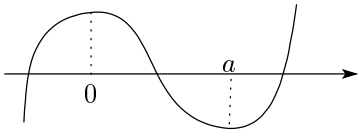
$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a - 6$  において

$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a) \quad f'(t) = 0$  より,  $t = 0, a$

増減表を考えて

|         |     |    |     |     |     |
|---------|-----|----|-----|-----|-----|
| $t$     | ... | 0  | ... | $a$ | ... |
| $f'(t)$ | +   | 0  | -   | 0   | +   |
| $f(t)$  | ↗   | 極大 | ↘   | 極小  | ↗   |

$f(t)$  のグラフが下図のようになればよい。



$$\therefore \begin{cases} f(0) = a - 6 > 0 & \therefore a > 6 \cdots \cdots \text{③} \\ f(a) = -a^3 + a - 6 < 0 & \therefore a^3 - a + 6 > 0 \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

$a > 6$  のとき, ④ は常に成り立つ。(∵  $a(a^2 - 1) + 6 > 0$ )

よって, ③, ④ から, 求める  $a$  の値の範囲は

$a > 6$  (答)

31

内心・外心

AB = 2, BC = 4, CA = 3 の三角形 ABC がある。この三角形 ABC の内接円の中心を I, 外接円の中心を K とし,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とするとき, 次の各問に答えよ。

(1)  $\overrightarrow{AI}$  を  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。

(2)  $\overrightarrow{AK}$  を  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。

(3) KI の長さを求めよ。

—解答例—

(1)

AI の延長と辺 BC との交点を D とすると BD :

$$DC = 2 : 3 \\ \overrightarrow{AD} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$$

また,  $BD = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$  であり,

$\angle B$  の二等分線は

AD を  $2 : \frac{8}{5} = 5 : 4$  に内分する。

$$\therefore \overrightarrow{AI} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} \quad (\text{答})$$

(2)  $\overrightarrow{AK} = s\vec{b} + t\vec{c}$  とおく。

$$\cos A = \frac{4 + 9 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 3 \cdot \cos A = -\frac{3}{2}$$

内積の定義から

$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{b} = 2 \times 1$$

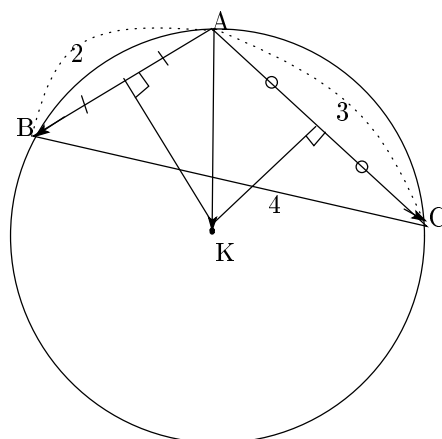
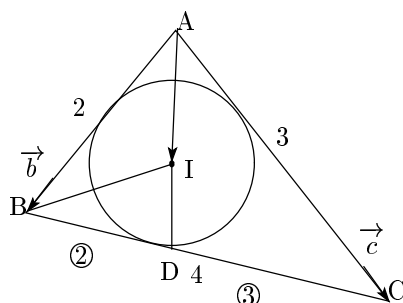
$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{b} = 3 \times \frac{3}{2}$$

$$\therefore (s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} = 4s - \frac{3}{2}t = 2$$

$$(s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = -\frac{3}{2}s + 9t = \frac{9}{2}$$

$$\therefore s = \frac{11}{15}, t = \frac{28}{45} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{11}{15}\vec{b} + \frac{28}{45}\vec{c} \quad (\text{答})$$



$$(3) \overrightarrow{IK} = \frac{11}{15}\vec{b} + \frac{28}{45}\vec{c} - \left( \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} \right) = \frac{2}{5}(\vec{b} + \vec{c})$$

$$|\vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 10 \quad \therefore KI = \frac{2}{5}\sqrt{10} \quad (\text{答})$$

32

場合の数

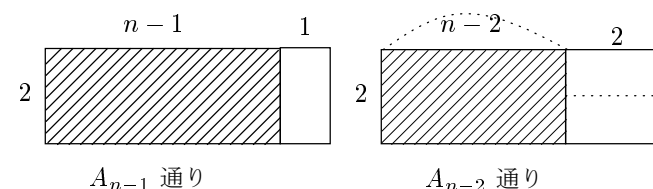
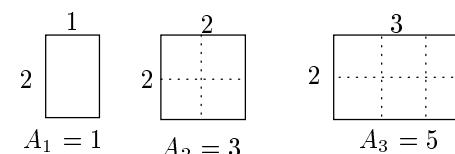
二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある。縦 2, 横  $n$  の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような総数を  $A_n$  で表す。ただし,  $n$  は正の整数である。

たとえば  $A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 5$  である。このとき以下の間に答えよ。

(1)  $n \geq 3$  のとき,  $A_n$  を  $A_{n-1}, A_{n-2}$  を用いて表せ。

(2)  $A_n$  を  $n$  で表せ。

—解答例—



(1)

図のようなタイルの敷き方を考えて

左図の場合は 1 通り, 右図の場合は 2 通りあるから,

$$A_n = 1 \cdot A_{n-1} + 2 \cdot A_{n-2}$$

$$\therefore n \geq 3 \text{ のとき, } A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} \quad (\text{答})$$

(2)

(1) の漸化式を変形して

$$\begin{cases} A_n - 2A_{n-1} = -(A_{n-1} - 2A_{n-2}) \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A_n + A_{n-1} = 2(A_{n-1} + A_{n-2}) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } A_n - 2A_{n-1} = (-1)^{n-2}(A_2 - 2A_1) = (-1)^{n-2} \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } A_n + A_{n-1} = 2^{n-2}(A_2 + A_1) = 2^n \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$  から,  $A_{n-1}$  を消去して,

$$3A_n = 2^{n+1} + (-1)^{n-2}$$

$$\therefore A_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-2}}{3} \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad (\text{答})$$

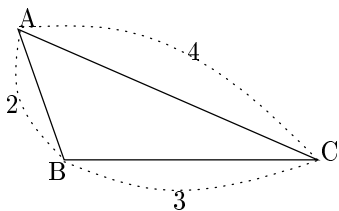
33

図形問題 (三角形)

- (1) 3 辺の長さが 2, 3, 4 である三角形がある. その面積は 3 より小さいことを示せ。
- (2) 3 辺の長さが  $a - 1, a, a + 1$  である三角形がある. その面積  $S$  を  $a$  で表せ。  
また, その三角形の内接円の半径を求めよ. ただし,  $a > 2$  とする.
- (3) (2) のとき,  $\frac{S}{a^2}$  のとりうる値の範囲を求めよ.

—解答例—

- (1)  $4^2 > 3^2 + 2^2$  から, この三角形は鈍角三角形である。(右図)  
底辺を 3 とした三角形を考えると, 高さは 2 より小さい。  
よって, 面積は  $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$  より小さい。(終)



- (2) 三角形をなす条件は  
 $(a - 1) + a > a + 1$  であるから,  $a > 2$   
 $a + 1$  の対角を  $\theta$  とおくと, 余弦定理から  
$$\cos \theta = \frac{(a - 1)^2 + a^2 - (a + 1)^2}{2 \cdot (a - 1)a} = \frac{a - 4}{2(a - 1)}$$
  
 $\sin \theta > 0$  から,  $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{(a - 4)^2}{4(a - 1)^2}} = \frac{\sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{2(a - 1)}$   
$$\therefore S = \frac{1}{2} \times a \times (a - 1) \times \frac{\sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{2(a - 1)} \quad \therefore S = \frac{a \sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{4} //$$
  
内接円の半径を  $r$  とおくと  
$$r \times \frac{a - 1 + a + a + 1}{2} = \frac{a \sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{4}, \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{6} //$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{S}{a^2} &= \frac{\sqrt{3(a + 2)(a - 2)}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{(a + 2)(a - 2)}}{a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{であるから} \\ 0 &< \frac{S}{a^2} < \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

34

点の存在領域

- $k$  は正の実数とする。 $xy$  平面上の点  $A(0, k)$  を通り,  $x$  軸から長さ  $k$  の線分を切り取るような円の中心を  $P$  とする。
- (1)  $k$  の値を定めたとき, 点  $P$  の描く軌跡を求めよ。
- (2) (1) の軌跡を  $C_k$  とする。 $k$  が変化するとき, 曲線  $C_k$  が通過する領域を図示せよ。

—解答例—

- (1) 円の中心を  $(a, b)$ , 半径を  $r$  とすると, 円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$  で  $y = 0$  とおいて,  $(x - a)^2 + b^2 = r^2 \quad \therefore x = a \pm \sqrt{r^2 - b^2}$

条件より  $2\sqrt{r^2 - b^2} = k \iff 4(r^2 - b^2) = k^2 \dots \textcircled{2}$

また, 円は点  $(0, k)$  を通るから

$$a^2 + (k - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$  から  $r$  を消去して

$$4a^2 + 4(k - b)^2 = 4b^2 + k^2 \quad \therefore b = \frac{1}{2k}a^2 + \frac{3}{8}k \quad (\because k > 0)$$

よって求める軌跡は 放物線  $y = \frac{1}{2k}x^2 + \frac{3}{8}k$  (答)

- (2) (1) の式を変形して

$$3k^2 - 8ky + 4x^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

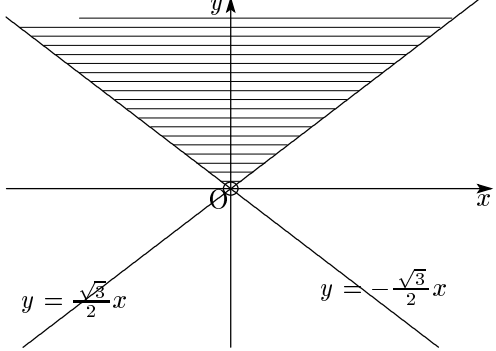
題意より,  $\textcircled{4}$  をみたす正の数  $k$  が存在することが条件である。

(i)  $x = 0$  のとき,  $k(3k - 8y) = 0 \quad k = \frac{8}{3}y > 0 \quad \therefore y > 0 \dots \textcircled{5}$

(ii)  $f(k) = 3k^2 - 8yk + 4x^2$  において 2 つの解が正であるとき  
$$\begin{cases} D/4 = 16y^2 - 12x^2 \geq 0 \iff (2y + \sqrt{3}x)(2y - \sqrt{3}x) \geq 0 \dots \textcircled{6} \\ \text{軸 } k = \frac{4}{3}y > 0 \iff y > 0 \dots \textcircled{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = x^2 > 0 \iff x \neq 0 \dots \textcircled{8} \end{cases}$$

以上から, 求める放物線の存在する領域は



35

最大・最小

$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  のとき

$$(x - 2y + 4z)^2 + (-3x + y + 2z)^2$$

のとり値の範囲を求めよ。

—解答例—

$$X = x - 2y + 4z, \quad Y = -3x + y + 2z \text{ とおく.}$$

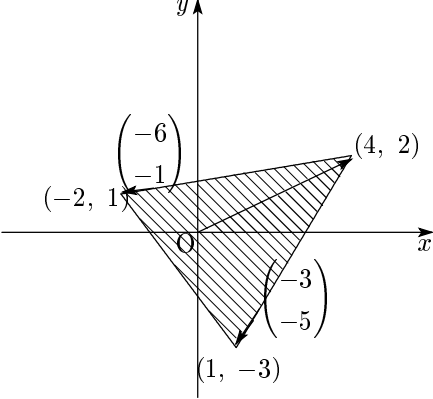
$$x + y + z = 1 \text{ より, } z = 1 - x - y$$

$$\text{また, } x, y, z \geq 0 \text{ から, } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq x + y \leq 1$$

$$\therefore \begin{cases} X &= x - 2y + 4(1 - x - y) = -3x - 6y + 4 \\ Y &= -3x + y + 2(1 - x - y) = -5x - y + 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq x + y \leq 1)$$

よって、点  $(X, Y)$  の存在範囲は下図の通りである。



点  $(X, Y)$  の存在領域は、図の斜線部分で境界を含む。

$X^2 + Y^2$  は原点から点  $(X, Y)$  への距離の平方であるから

$$(X, Y) = (4, 2) \text{ のとき, 最大値 } 20, \quad (X, Y) = (0, 0) \text{ のとき, 最小値 } 0$$

$$\therefore 0 \leq (x - 2y + 4z)^2 + (-3x + y + 2z)^2 \leq 20 \quad (\text{答})$$

36

場合の数

赤球 3 個、白球 3 個、青球 3 個の 9 個の球をを 3 つの箱に入れる。ただし、どの箱にも少なくとも 1 個の球が入るものとする。同じ色の球には区別がないものとして、次の各問いに答えよ。

(1) 9 個の球を A, B, C 3 つの箱に入れる方法は何通りあるか。

(2) 9 個の球を区別のつかない 3 つの箱に入れる方法は何通りあるか。

—解答例—

(1)

例えば、赤球 3 個を A, B, C に分ける方法は

$$(3, 0, 0), \quad (2, 1, 0), \quad (1, 1, 1)$$

の 3 つの場合が考えられ、それぞれ 3 通り、6 通り、1 通りの計 10 通りがある。

白球、青球についても同様にそれぞれ 10 通りの方法がある。したがって

$$10^3 = 1000 \text{ 通り}$$

どれか 1 つのみが空の場合は、 $(3, 0), (2, 1)$  の 2 つの場合で、それぞれ 2 通りずつ考えられるから、4 通り。よって

$$3 \cdot (4^3 - 2) = 186 \text{ 通り}$$

また、2 つの箱が空の場合が、3 通りある。

ゆえに、求める方法は

$$1000 - 186 - 3 = 811 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

(2) 箱に区別つけて、次の各場合は箱の中身が同じである。

| 箱 A       | 箱 B       | 箱 C       | 場合の数   |
|-----------|-----------|-----------|--------|
| (0, 0, 1) | (0, 0, 1) | (3, 3, 1) | → 3 通り |
| (0, 1, 0) | (0, 1, 0) | (3, 1, 3) | → 3 通り |
| (1, 0, 0) | (1, 0, 0) | (1, 3, 3) | → 3 通り |
| (0, 1, 1) | (0, 1, 1) | (3, 1, 1) | → 3 通り |
| (1, 0, 1) | (1, 0, 1) | (1, 3, 1) | → 3 通り |
| (1, 1, 0) | (1, 1, 0) | (1, 1, 3) | → 3 通り |
| (1, 1, 1) | (1, 1, 1) | (1, 1, 1) | → 1 通り |

よって、求める場合の数は

$$\frac{811 - 3 \times 6 - 1}{3!} + 1 + 6 = 139 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

37

整数・・・論証

方程式  $x^3 - 3x - 1 = 0$  の解  $\alpha$  について次のことがらを示せ。

- (1)  $\alpha$  は整数でない。
- (2)  $\alpha$  は有理数でない。
- (3)  $\alpha$  は  $p + q\sqrt{3}$  ( $p, q$  は有理数,  $q \neq 0$ ) の形で表せない。

—解答例—

(1)

$\alpha$  が整数とすると,  $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \quad \therefore \alpha(\alpha^2 - 3) = 1 \cdots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$  より,  $\alpha$  が奇数でなくてはならない。

ところが,  $\alpha$  を奇数とすれば,  $\alpha^2 - 3$  は偶数となり,

$\textcircled{1}$  の左辺はいずれにしても偶数となり不合理である。よって,  $\alpha$  は整数でない。(終)

(2)

$\alpha$  を有理数として,  $\alpha = \frac{m}{n}$  ( $m, n$  は互いに素な整数で,  $n \neq 0$ ) と仮定すると

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\frac{m}{n} - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  の両辺を  $n^2$  倍して,

$$\frac{m^2}{n} - 3mn - n^2 = 0 \iff \frac{m^2}{n} = n(3m + n) \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  の右辺は整数であるから, 左辺も整数である。

$m, n$  は互いに素であるから,  $n = 1$  以外にはありえない。

従って,  $\alpha = m$  (整数) となり, (1) に矛盾する。

よって,  $\alpha$  は有理数でない。(終)

(3)

$\alpha = p + q\sqrt{3}$  とすると

$$(p + q\sqrt{3})^3 - 3(p + q\sqrt{3}) - 1 = 0$$

$$\therefore p^3 + 9pq^2 - 3p - 1 + 3q(p^2 + q^2 - 1)\sqrt{3} = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$p, q$  は有理数であり,  $q \neq 0$  であるから  $\textcircled{4}$  より

$$\begin{cases} p^3 + 9pq^2 - 3p - 1 = 0 \cdots \textcircled{5} \\ p^2 + q^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$\textcircled{5} - \textcircled{6} \times 9p$  より

$$-8p^3 + 6p - 1 = 0 \text{ となり, } (-2p)^3 - 3(-2p) - 1 = 0$$

これは,  $x^3 - 3x - 1 = 0$  が有理数  $-2p$  を解にもつことになり, 不合理。

よって,  $\alpha$  は  $p + q\sqrt{3}$  の形では表せない。(終)

38

整数・・・論証

自然数  $a, b, c, d$  が  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  を満たしている。

- (1)  $d$  が 3 で割り切れるならば,  $a, b, c$  はすべて 3 で割り切れるか,  $a, b, c$  のいずれも 3 で割り切れないかのいずれかであることを示せ。
- (2)  $a, b, c$  のうち偶数が少なくとも 2 つあることを示せ。

—解答例—

(1)

(ア)  $a, b, c$  のうち, 1 つが 3 で割り切れ, 2 つが 3 で割りきれないとする。

$a = 3l, b = 3m \pm 1, c = 3n \pm 1$  ( $l \geq 0, m, n \geq 1$  の整数) とおいて一般性を失わない。

一般に  $x$  を  $k$  で割った余りを  $r$  とするとき,  $x \equiv r \pmod{k}$  と表すものとする。

$$a^2 \equiv 0, b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき, } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

(イ)  $a, b, c$  のうち, 2 つが 3 で割り切れ, 1 つが 3 で割りきれないとする。

$$a \equiv b \equiv 0, c \equiv \pm 1 \text{ のとき, } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

となり,  $d^2$  は 3 で割り切れない。

ゆえに, 対偶が示されたので, 題意は証明された。(終)

(2)

(ア)

$a, b, c$  のうち, 3 つとも奇数であるとする。

$$a = 2l \pm 1, b = 2m \pm 1, c = 2n \pm 1 \text{ とおいて}$$

$$d^2 \equiv 3 \equiv 1 \pmod{2} \text{ と表され, } d^2 \text{ は奇数} \iff d \text{ も奇数.}$$

よって,  $d = 2k - 1$  ( $k \geq 1$  なる整数) とおけて

$$d^2 = (2k - 1)^2 = 4k(k - 1) + 1 \text{ となり, } d^2 \text{ は 4 で割って 1 余る数.}$$

ところが,  $a^2 + b^2 + c^2 = 4(l^2 + m^2 + n^2 + l \pm m \pm n) + 3$  より, 4 で割って 3 余る数となり矛盾。

(イ)

$a, b, c$  のうち, 2 つが奇数で 1 つが偶数とする。

$$a = 2l \pm 1, b = 2m \pm 1, c = 2n \text{ とおいて一般性を失わない.}$$

$$d^2 \text{ は偶数であり, } d \text{ も偶数で, } d = 2k \text{ から, } d^2 = 4k^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(l^2 + m^2 \pm l \pm n) + 2 \text{ となり, 4 で割って余りが 2 となり不合理.}$$

以上から, 題意は示された。(終)

39

確率

$n$  個のサイコロを同時にふり、出た目の最大値を  $M_n$ 、最小値を  $m_n$  とするとき、  
 $M_n - m_n > 1$  となる確率を求めよ。

—解答例—

余事象  $M_n - m_n \leq 1$  なる場合を考える。

(i)  $M_n - m_n = 0$  のとき、

$n$  個のサイコロがすべて同じ目であるときで、この確率は

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdots \textcircled{1}$$

(ii)  $M_n - m_n = 1$  のとき、

$n$  個とも 2 つの目  $(1, 2), (2, 3), \dots, (5, 6)$  の目のどちらかが出て、しかも、すべて同じ目である場合を除く。この確率は

$$5 \times \left(\frac{2^n - 2}{6^n}\right) \cdots \textcircled{2}$$

よって、求める確率は

$$1 - (\textcircled{1} + \textcircled{2}) = \frac{6^n - 5 \cdot 2^n + 4}{6^n} \quad (\text{答})$$

40

三角関数

$\theta$  は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲の角とする。

(1)  $\sin 3\theta = \sin 2\theta$  を満たす  $\theta$  を求めよ。

(2)  $m, n$  を 0 以上の整数とする。 $\theta$  についての方程式

$$\sin 3\theta = m \sin 2\theta + n \sin \theta$$

が解をもつときの  $(m, n)$  とそのときの解  $\theta$  を求めよ。

—解答例—

(1)

与式から、

$$2 \cos \frac{5}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} = 0 \text{ であるから, } \cos \frac{5}{2}\theta = 0, \quad \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < \frac{5}{2}\theta < \frac{5}{4}\pi, \quad 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ であることから,}$$

$$\cos \frac{5}{2}\theta = 0 \iff \frac{5}{2}\theta = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{5} \quad (\text{答})$$

(2)

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$$

$$= \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \text{ であるから,}$$

$$\sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) = 2m \sin \theta \cos \theta + n \sin \theta$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから,}$$

$$4 \cos^2 \theta - 1 = 2m \cos \theta + n, \quad \therefore 4 \cos^2 \theta - 2m \cos \theta - (n + 1) = 0$$

$$\text{ここで, } \cos \theta = t \text{ とおくと, } f(t) = 4t^2 - 2mt - (n + 1) \cdots \textcircled{1}$$

題意より、 $\textcircled{1}$  が  $0 < t < 1$  に解をもつことが条件である。

$f(0) = -(n + 1) < 0$  であるから、 $f(1) > 0$  なることが必要十分。

$$\therefore 3 - 2m - n > 0 \iff 2m + n < 3 \cdots \textcircled{2}$$

$0 \leq m \leq 1$  のときを考えると、

$$m = 0 \text{ のとき, } n = 0, 1, 2 \quad m = 1 \text{ のとき, } n = 0$$

よって、求める  $(m, n)$  とそのときの解は

$$\begin{cases} (m, n) = (0, 0) \text{ のとき, } \theta = \pi/3 \\ (m, n) = (0, 1) \text{ のとき, } \theta = \pi/4 \\ (m, n) = (0, 2) \text{ のとき, } \theta = \pi/6 \\ (m, n) = (1, 0) \text{ のとき, } \theta = \pi/5 \end{cases} \quad (\text{答}) \quad (\because (1))$$

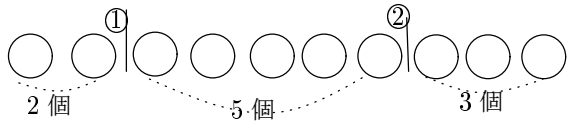
41

場合の数・・・重複組合せ

- (1)  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$  ( $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ) を満たす整数の組  $(x_1, x_2, x_3)$  はいくつあるか.
- (2)  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$  ( $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$ ) を満たす整数の組  $(x_1, x_2, x_3)$  はいくつあるか.
- (3) 4 桁の整数を  $a_4a_3a_2a_1$  と表す.  $9 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$  を満たすものは何個あるか.

—解答例—

(1)



図のように 2 つの仕切り (①, ②) を考えて,

① の左の個数を  $x_1$ , ① と ② の間の個数を  $x_2$ , ② の右の個数を  $x_3$  とする.

求める場合の個数は, 仕切り 2 つと球 10 個を含めて 12 個のスペースを考えて, どこに 2 つの仕切りを入れればよいかということであるから

$${}_{12}\text{C}_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \mathbf{66 \text{ 通り}} \quad (\text{答}) \quad ({}_3\text{H}_{10} \text{ で表す.})$$

(2)  $x_1' = x_1 - 1, x_2' = x_2 - 1, x_3' = x_3 - 1$  とおくと

$$x_1' + 1 + x_2' + 1 + x_3' + 1 = 10 \iff x_1' + x_2' + x_3' = 7 \quad (x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0)$$

(1) を参考にして, 求める場合の数は

$${}_3\text{H}_7 = {}_9\text{C}_2 = \mathbf{36 \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

(3)  $9 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$  は 10 個の数から重複を許して 0 から 9 までの 4 個の数字を取り出す場合を考えて

$${}_{10}\text{H}_4 = {}_{13}\text{C}_4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715 \text{ 通り}$$

そのうち,  $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$  の場合を除いて

$$715 - 1 = \mathbf{714 \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

註

一般に  $n$  個から重複を許して  $r$  個取り出す方法は

$${}_n\text{H}_r = {}_{n+r-1}\text{C}_r$$

である.

42

場合の数

$2n$  個ずつのリンゴ, カキ, ミカンでくだものかごを作る。ただし, くだものかごには各種類少なくとも 1 つずつを入れるものとして, 次の各問いに答えよ。

- (1) 同じかご 2 つと, これらすべてのくだものを使って, 2 組のくだものかごを作るとき, 何種類の作り方があるか.
- (2) 次の (i), (ii) の個数のくだもので, くだものかごを 1 つ作るとき, それぞれ何通りの作り方があるか. (i)  $2n$  個 (ii)  $5n$  個

—解答例—

(1) かごを A, B として, かご A に何個入れるかを考える.

3 種類の入れ方は, それぞれ  $2n - 1$  通りあるから

$(2n - 1)^3$  通りの方法が考えられるが

そのうち, すべて  $n$  個ずつの場合が 1 通りあり, あとは A, B に入れる方法は同じ場合が 2 通りある. よって求めるかごの作り方は

$$\frac{(2n - 1)^3 - 1}{2} + 1 = \frac{(2n - 1)^3 + 1}{2} = \mathbf{n(4n^2 - 6n + 3) \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

(2)

(i) リンゴ, カキ, ミカンをそれぞれ  $x, y, z$  個ずつ使うとして

$$x + y + z = 2n \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1) \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数の組  $(x, y, z)$  の総数を求めればよい. ① は

$$x' + y' + z' = 2n - 3 \quad (x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0)$$

を満たす整数の組  $(x', y', z')$  の総数を求めればよいから

$$\therefore {}_3\text{H}_{2n-3} = {}_{2n-1}\text{C}_{2n-3} = {}_{2n-1}\text{C}_2 = \mathbf{(2n - 1)(n - 1) \text{ 通り}} \quad (\text{答})$$

(ii) 最初に  $2n$  個ずつ全部使っていて,  $n$  個を減ずればよい.

$$\therefore u + v + w = n \quad (u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0)$$

を満たす整数の組  $(u, v, w)$  の総数を求めて

$${}_3\text{H}_n = {}_{n+2}\text{C}_2 = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

43

場合の数

次の各問いに答えよ.

(1) 男子 3 人, 女子 3 人の計 6 人を一列に並べるとき, 次の並び方は何通りあるか.

- ① 男子 3 人が隣り合うような並び方.
- ② 男子 3 人のうちどの 2 人も隣り合わない並び方.

(2) 6 枚のコインを 4 つの箱に入れる方法はそれぞれ何通りあるか. ただし, どの箱にも少なくとも 1 つのコインが入るものとする.

- ① コインは区別できないが, 箱は区別できるとき.
- ② コインは区別できるが, 箱は区別できないとき.
- ③ コインも箱も区別できるとき.

—解答例—

(1)

① まず男子 3 人を 1 人として並べ, そののちに男子 3 人のならば方を考えて

$4! \times 3! = 144$  通り (答)

② 女子 3 人を並べて, できる 4 つのすきまから 3 つを選んで男子を並べる.

$\therefore 3! \times {}_4C_3 \times 3! = 144$  通り (答)

(2)

① 4 つの箱を A, B, C, D に入れる個数を考えて

$(3, 1, 1, 1) \cdots (\text{ア}) \quad (2, 2, 1, 1) \cdots (\text{イ})$

の 2 つの場合が考えられ, (ア) の場合は 4 通り, (イ) の場合は  ${}_4C_2 = 6$  通り  
よって求める場合の数は,  $4 + 6 = 10$  通り (答)

② (ア) の場合はどのコインを 3 個入る箱に入れるかを考えて  ${}_6C_3 = 20$  通り.

(イ) の場合はどのコインを 2 枚入る箱に入れるかを考えて

$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{2!} = 45$  通り.

したがって,  $20 + 45 = 65$  通り (答)

③ (ア) のとき,  ${}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 4 = 480$  通り.

(イ) のとき,  ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_4C_2 = 1080$  通り.

したがって, 求める場合の数は  $480 + 1080 = 1560$  通り (答)

別解

上記②において, 箱を区別するから,  $65 \times 4! = 1560$  通り

44

解の個数

$k$  を実数の定数とするととき, 方程式

$|2x^3 + 3x^2 - 12x - 10| = k$

が異なる 4 つの実数解  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ( $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ ) をもつとき,

(1)  $k$  のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  が整数となる場合があるかどうか調べよ.

—解答例—

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$  とおく.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

増減表から

|         |            |      |            |       |            |
|---------|------------|------|------------|-------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-2$ | $\cdots$   | $1$   | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$   | $+$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | $10$ | $\searrow$ | $-17$ | $\nearrow$ |

よって,  $y = |f(x)|$  のグラフは右のようになり

題意を満たす  $k$  の値の範囲は

$10 < k < 17$  (答)

(2) グラフから  $\alpha, \beta, \gamma$  は直線  $y = k$  と曲線  $y = -f(x)$  との交点の  $x$  座標である.

$-2x^3 - 3x^2 + 12x + 10 = k \iff 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10 + k = 0$

解と係数との関係から,

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{2}$

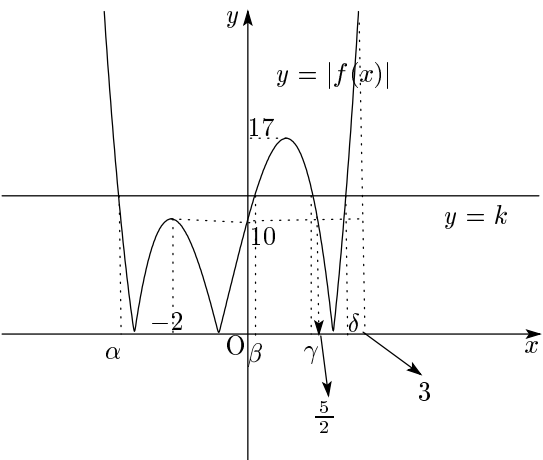
また,  $f(3) = 35 > 17$

$f(x) = 10$  のとき,  $2x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = 10 \iff (x+2)^2(2x-5) = 0 \iff x = -2, \frac{5}{2}$

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) < f(\delta) < f(3) \iff \frac{5}{2} < \delta < 3$  より

$\therefore 1 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < \frac{3}{2}$

したがって  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  は整数ではない.(終)



45

平面ベクトル

△OAB の周または内部に点 P があり

$$2\vec{OP} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2$$

が成り立つ.

(1) 点 P の存在範囲を述べよ.

(2)  $OA = 3, OB = 4, \cos \angle AOB = \frac{1}{3}$  であるとき

① 点 P の動く範囲の長さを求めよ.

②  $|\vec{OP} + \vec{AP} + \vec{BP}|$  の最小値を求めよ.

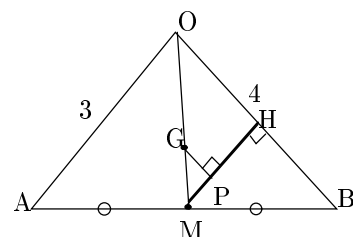
—解答例—

(1) 条件式を変形して

$$\vec{OB} \cdot (2\vec{OP} - \vec{OA} - \vec{OB}) = 0$$

$$\therefore \vec{OB} \cdot \left( \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right) = 0$$

~~~~~ は点 P が AB の中点 M を通り,  
OB に垂直な線分 (三角形の内部・周上) を動くことを示している.(答)



(2)

$$\textcircled{1} \sin \angle AOB = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle OAB \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle AMB = 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot MH \quad \therefore MH = \sqrt{2} \text{ (答)}$$

② 与式を変形して

$$|\vec{OP} + \vec{OP} - \vec{OA} + \vec{OP} - \vec{OB}| = |3\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})|$$

$$\therefore \text{与式} = 3 \left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} \right| \text{ であるから, } \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = \vec{OG} \quad (G \text{ は重心})$$

したがって, 与式 $= 3|\vec{GP}|$ であるから △OAB の重心 G と MH 上の点 P の距離が最小になるのは, $GP \perp MH$ のときである.

$$|\vec{OM}|^2 = \frac{1}{4} \left(|\vec{OA}|^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot = \frac{33}{4} \quad \therefore OM = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{33}}{6}, \quad MP = \frac{1}{3} MH = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore GP = \sqrt{\frac{33}{36} - \frac{2}{9}} = \frac{5}{6} \text{ より, } 3GP = \frac{5}{2} \text{ (答)}$$

46

整数問題… 論証

(1) $p > 4$ とする. p と $p+2$ がともに素数とするとき, $p+1$ は 6 の倍数であることを示せ.

(2) 2 以上の自然数 n に対し, n と n^2+2 がともに素数であるとき, $n=3$ に限ることを示せ.

—解答例—

(1) p は奇数であるから, $p+1$ は偶数である.

$p, p+1, p+2$ は連続する 3 整数であるから, その中に 3 の倍数は一つ存在する.

$p, p+2$ は 5 以上の素数であるから, 3 の倍数ではない.

よって, $p+1$ は 3 の倍数である.

以上から, $p+1$ は 6 の倍数である. (終)

(2) $n=3$ のときは $n, n^2+2=11$ はともに素数である.

$n \geq 5$ において

$n = 3k, 3k+1, 3k+2 (k \geq 1)$ のとき

それぞれ

$$n^2 + 2 = 9k^2 = 3(3k^2) + 2$$

$$n^2 + 2 = (9k^2 + 6k + 1) + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$$

$$n^2 + 2 = (9k^2 + 6k + 4) + 2 = 3(3k^2 + 2k + 2)$$

となり, n^2+2 は素数ではない.

したがって, $n \geq 5$ のとき, n, n^2+2 がともに素数となることはない.

ゆえに題意は示された. (答)

47

図形

AB = 1, AC = 2 である △ABC と △ABC の内部にある点 P を
PA = PB かつ、 $k\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$
を満たすように定める。PC = $\sqrt{6}$ PA となるとき、k の値と BC の長さを求めよ。

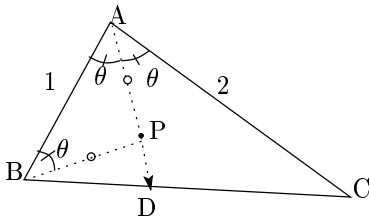
—解答例—

$$\begin{aligned} k\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{0} \\ \therefore -k\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \overrightarrow{0} \\ \therefore (k+3)\overrightarrow{AP} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{k+3} \quad (k \neq -3)$$

k = -3 のときは A, B, C
は 1 直線上にあり，三角形をつくらない。

$$\therefore k \neq -3 \text{ のとき, } \overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{k+3} \dots \textcircled{1}$$



① より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{k+3} \cdot \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{3}{k+3} \overrightarrow{AD}$$

ここに，点 D は BC を 1 : 2 に内分する点である。ゆえに AP は ∠A の二等分線である。

$$P \text{ は三角形 } ABC \text{ の内部の点であるから, } 0 < \frac{3}{k+3} < 1 \iff k > 0 \dots \textcircled{2}$$

条件式から，∠BAC = 2θ とおくと

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PC}|^2 &= |k\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}|^2 \\ \iff 6PA^2 &= k^2PA^2 + 2k\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 4PB^2 \quad (\because PC^2 = 6PA^2) \\ \iff (2 - k^2)PA^2 &= 4k\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4k|\overrightarrow{PA}|^2 \cos(\pi - 2\theta) \\ \iff k^2 - 2 &= 4k \cos 2\theta \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

また，① より

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{4|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{(k+3)^2} = \frac{8 + 8\cos 2\theta}{(k+3)^2} = \frac{16\cos^2 \theta}{(k+3)^2}$$

$$AP \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ より, } AP^2 = \frac{1}{4\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \frac{1}{4\cos^2 \theta} = \frac{16\cos^2 \theta}{(k+3)^2} \iff k+3 = 8\cos^2 \theta \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から, } k^2 - 2 = k(k-1) \quad \therefore k = 2 \dots (\text{答})$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } \cos 2\theta = \frac{1}{4} \text{ であり, 余弦定理より}$$

$$BC^2 = 1 + 4 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 4 \quad \therefore BC = 2 \dots (\text{答})$$

48

整数… 論証

x 座標 y 座標とも整数である点を格子点という。いま，5 個の異なる格子点があるとき，5 個の点から異なる 2 点を結ぶ線分を考える。それらの線分の中点のうち，少なくとも一つは格子点であることを示せ。

—解答例—

5 個の格子点を，(x₁, y₁), (x₂, y₂), (x₃, y₃), (x₄, y₄), (x₅, y₅) (x_i, y_i ∈ Z)
とおく。

x 座標 y 座標 の場合は

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{(偶数, 偶数)} \\ \text{(ii)} & \text{(偶数, 奇数)} \\ \text{(iii)} & \text{(奇数, 偶数)} \\ \text{(iv)} & \text{(奇数, 奇数)} \end{array} \right. \text{ の 4 通りが考えられる。}$$

したがって，5 個の格子点のうち，2 個は (i)~ (iv) のどれかである。

ゆえに 5 個の格子点のうちいずれか 2 個の格子点の中点は，また格子点である。(終)

49

整数問題

n は自然数とする. $a_n = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} + an + b$ (a, b は整数) とおくと、次の問いに答えよ.

- (1) ${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$ を示せ.
- (2) a_n が常に 9 で割り切れるような整数 a, b の存在を示せ.

—解答例—

(1)

$(1+x)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1x + {}_{2n}C_2x^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}x^{2n-1} + {}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ において

$x=1$ を代入して

$$2^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} \cdots \textcircled{1}$$

$x=-1$ を代入して

$$0 = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - \cdots - {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ から

$$2^{2n} = 2({}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n})$$

$$\therefore 2^{2n-1} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad (\text{終})$$

(2)

$$2^{2n-1} = 2 \cdot 4n - 1$$

$$= 2 \cdot (1+3)^{n-1} = 2 \{1 + {}_{n-1}C_1 3 + {}_{n-1}C_2 3^2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} 3^{n-1}\}$$

$$= 6n - 4 + 2 \cdot 3^2 \{ {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} 3^{n-3} \}$$

$$\therefore a_n = (a+6)n + b - 4 + 2 \cdot 3^2 \{ {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} 3^{n-3} \}$$

$$= (a+6)n + (b-4) + 9\ell \quad (\ell \text{ は整数})$$

a_n が任意の n について 9 の倍数であるためには、 $a=3, b=4$ なる整数 a, b が存在する.

逆に $a=3, b=4$ なる整数 a, b に対して、 a_n は 9 の倍数である. (終)

50

図形＝求積

a を実数定数とする。座標平面上の曲線 $C: y = x^3 - (a-2)x^2$ に対し、点 $(1, 3a-1)$ を通る C の接線を ℓ とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) ℓ がただ 1 本存在するような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) の範囲にあるとき、 C と ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ。

—解答例—

(1) 接点の座標を $(t, t^3 - (a-2)t^2)$ において

$y' = 3t^2 - 2(a-2)t$ が接線の傾きである.

$$\therefore \ell: y - \{t^3 - (a-2)t^2\} = \{3t^2 - 2(a-2)t\}(x-t)$$

点 $(1, 3a-1)$ を通ることから

$$3a-1 - t^3 + (a-2)t^2 = \{3t^2 - 2(a-2)t\}(1-t)$$

$$\therefore 2t^3 - (a+1)t^2 + 2(a-2)t + 3a-1 = 0$$

$$(t+1)\{2t^2 - (a+3)t + 3a-1\} = 0 \text{ より, } t = -1, 2t^2 - (a+3)t + 3a-1 = 0$$

$t = -1$ だけが解であるためには、 $2t^2 - (a+3)t + 3a-1 = 0$ より

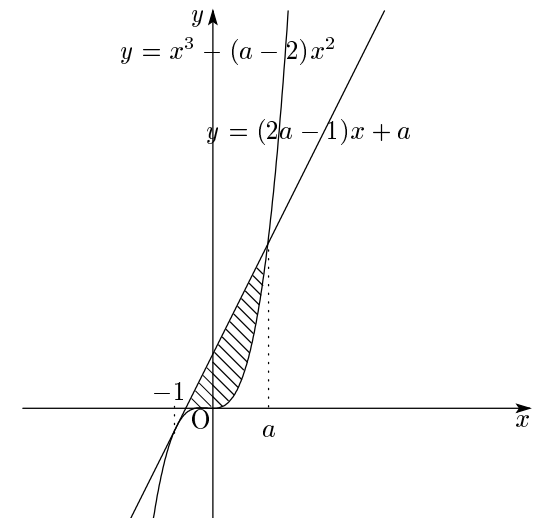
$$\text{判別式 } D = (a+3)^2 - 8(3a-1) < 0 \iff (a-1)(a-17) < 0 \quad \therefore 1 < a < 17 \cdots (\text{答})$$

(2) $t = -1$ のとき、 $\ell: y = (2a-1)x + a$

$$x^3 - (a-2)x^2 = (2a-1)x + a \text{ から, } (x+1)^2(x-a) = 0 \quad \therefore x = -1, a$$

$-1 \leq x \leq a$ において、 $(2a-1)x + a \geq x^3 - (a-2)x^2$ であるから

$$\begin{aligned} \text{面積 } S &= \int_{-1}^a \{(2a-1)x + a - x^3 + (a-2)x^2\} dx \\ &= - \int_{-1}^a (x+1)^2(x-a) dx \\ &= - \int_{-1}^a \{(x+1)^2(x+1-a-1)\} dx \\ &= \int_{-1}^a \{(a+1)(x+1)^2 - (x+1)^3\} dx \\ &= \left[(a+1) \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^4}{4} \right]_{-1}^a \\ &= \frac{(a+1)^4}{12} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



51

整数問題… 論証

p を素数. n を正の整数とする.
 p^n の約数の個数の 2 乗が p^n に等しくなるような p, n の値を求めよ.

—解答例—

p は素数であるから、約数の個数は 1 と p を入れて、 $n+1$ 個ある.

$$\therefore p^n = (n+1)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たすような p, n の値を調べる.

とりあえず実験してみよう.

$$\left\{ \begin{array}{l} n=1 \text{ のとき, } p=2^2=4, \text{ となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=2 \text{ のとき, } p^2=3^2=9, \text{ となり, } p=3. \text{ (適)} \\ n=3 \text{ のとき, } p^3=4^2=16, \text{ となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=4 \text{ のとき, } p^4=5^2=25, \text{ となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \\ n=5 \text{ のとき, } p^5=6^2=36, \text{ となり, } p \text{ は素数でない. (不適)} \end{array} \right.$$

$n \geq 6$ のとき, $p^n > (n+1)^2 \cdots \cdots (*)$ なることを示す.

(1) $n=6$ のとき, $p^6 \geq 2^6 = 64 > (6+1)^2 = 49$ で成立.

(2) $n=k$ のとき, $p^k > (k+1)^2$ ($k \geq 6$) が成り立つと仮定する.

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p \cdot p^k \\ &> p(k+1)^2 \quad (\because (*)) \\ &\geq 2(k+1)^2 \quad (\because p \geq 2) \\ 2(k+1)^2 - (k+2)^2 &= k^2 - 2 > 0 \quad (\because k \geq 6) \\ \therefore 2(k+1)^2 &> (k+2)^2 \\ \text{よって, } p^{k+1} &> (k+2)^2 \text{ となり, 成立.} \\ \therefore p^n &> (n+1)^2 \quad (n \geq 6) \end{aligned}$$

よって、求める p, n の値は

$$p=3, \quad n=2 \cdots \cdots \text{(答)}$$

52

図形と方程式

xy 平面上で、円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の外部にある点 $P(a, b)$ を考える。
 点 P から円 C に引いた 2 つの接線の接点を Q_1, Q_2 とし、線分 $Q_1 Q_2$ の中点を Q とする。
 点 P が円 C の外部で、 $x(x-y+1) < 0$ を満たす範囲にあるとき、点 Q の存在する領域を図示せよ。

—解答例—

まず、点 P は円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるから

$$a^2 + b^2 > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ とおくと

点 Q_1, Q_2 における接線は、それぞれ

$$x_1 x + y_1 y = 1, \quad x_2 x + y_2 y = 1 \text{ となる.}$$

いずれも点 (a, b) を通ることから、

$$a x_1 + b y_1 = 1, \quad a x_2 + b y_2 = 1$$

よって直線 $Q_1 Q_2$ の式は

$$a x + b y = 1 \cdots \textcircled{2}$$

また、点 O, P, Q は一直線上にあり、点 Q は

$$\text{線分 } Q_1 Q_2 \text{ の垂直二等分線 } b x - a y = 0 \cdots \textcircled{3}$$

と $\textcircled{1}$ の直線の交点である。

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を連立させて解くと

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b}{a^2 + b^2} \cdots \textcircled{4} \quad (\because \textcircled{1})$$

$\textcircled{4}$ から、 $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$ であるから

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\because (x, y) \neq (0, 0))$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 > 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 < 1 \cdots \textcircled{5}$$

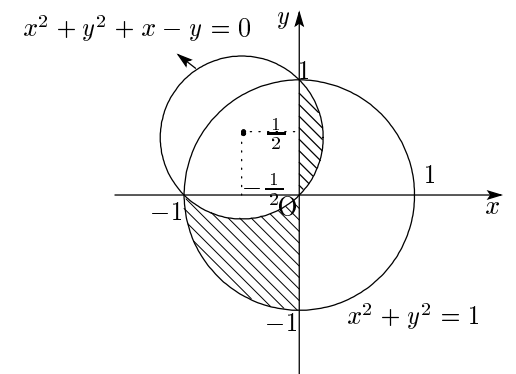
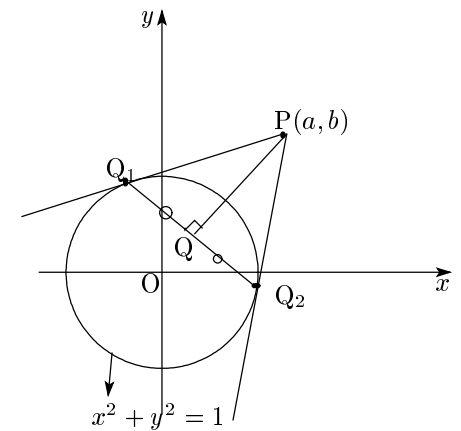
また、与えられたもう一つの条件から

$$a(a-b+1) < 0$$

$$\iff \frac{x}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \right) < 0$$

$$\therefore x \left\{ \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right\} < 0 \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}, \textcircled{6}$ から、求める範囲は右上図の斜線部分 (境界は含まない) (答)



53

図形と方程式

- xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ おける接線 ℓ に
 定点 $P(p, 0)$, $Q(-q, 0)$ ($1 < q < p$) から引いた垂線の足をそれぞれ R, S とする。
- (1) ℓ の方程式を求めよ。
 - (2) $PR^2 + QS^2$ の最小値を求めよ。
 - (3) $PR + QS$ を最小にする接線 ℓ を求めよ。

—解答例—

(1) $\ell: x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ (答)

$$(2) PR = \frac{|p \cos \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |p \cos \theta - 1|, \quad QS = \frac{|-q \cos \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |q \cos \theta + 1|$$

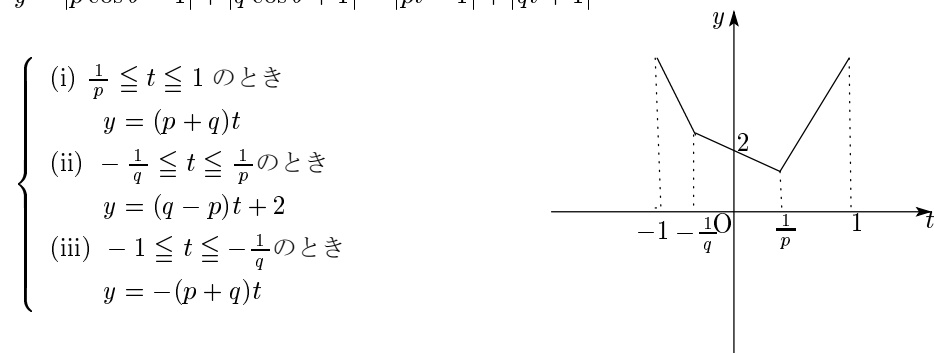
$$\begin{aligned} PR^2 + QS^2 &= (p \cos \theta - 1)^2 + (q \cos \theta + 1)^2 \\ &= (p^2 + q^2) \cos^2 \theta - 2(p - q) \cos \theta + 2 \\ &= (p^2 + q^2) \left(\cos \theta - \frac{p - q}{p^2 + q^2} \right)^2 + \frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

$$p > q > 1, \quad p^2 + q^2 - (p - q) = p(p - 1) + q(q + 1) > 0 \text{ より, } 0 < \frac{p - q}{p^2 + q^2} < 1$$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{p - q}{p^2 + q^2} \text{ のとき, 最小値: } \frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2} \text{ (答)}$$

(3) $\cos \theta = t$, $PR + QS = y$ において

$$y = |p \cos \theta - 1| + |q \cos \theta + 1| = |pt - 1| + |qt + 1|$$



グラフから, $PR + QS$ が最小になるのは, $t = \cos \theta = \frac{1}{p}$ のときで,

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}$$

$$\text{よって求める接線の式は, } \frac{1}{p}x \pm \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}y = 1 \iff x \pm \sqrt{p^2 - 1}y = p \text{ (答)}$$

54

整数問題…格子点(やや難)

- xy 座標平面上に, 三角形 ABC がある。
- (1) 三角形の 3 つの頂点がすべて格子点であるとする. 3 辺のうち, 2 辺上に両端を除いて奇数個の格子点があるとする, 残りの 1 辺の上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。
 - (2) 2 辺 AB, AC 上に両端を除いてちょうど 9 個ずつの格子点があるとする, 三角形 ABC の面積は 50 で割り切れる整数であることを示せ。(東京大・改題)

—解答例—

(1) 点 A を原点 O に移動して $\triangle ABC \implies \triangle OA'B'$ を考える。

いま整数 x_1, y_1 が互いに素であれば, $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$ とおくと, 格子点は両端を除いて存在しない. 例えば $\overrightarrow{OP} = (2, 3)$ とおくと, 2 と 3 は互いに素であるから存在しないが, $\overrightarrow{OP} = 4(2, 3)$ とおくと両端を除いて 3 個の格子点が存在する。

OA', OB' 上に両端を除いてそれぞれ $2\ell - 1$ (個), $2k - 1$ (個) の格子点が存在するとする。

$\overrightarrow{OA'} = 2\ell(x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB'} = 2k(x_2, y_2)$ をとる. ここに x_1 と y_1 , x_2 と y_2 は互いに素であるとする。

いま, $\overrightarrow{B'A'} = (2\ell x_1 - 2k x_2, 2\ell y_1 - 2k y_2)$ において

$\ell x_1 - k x_2$, $\ell y_1 - k y_2$ の最大公約数を d として

$$2\ell x_1 - 2k x_2 = 2dX, \quad 2\ell y_1 - 2k y_2 = 2dY \quad (X, Y \text{ は互いに素})$$

より,

$$\therefore \overrightarrow{B'A'} = 2d(X, Y)$$

とおける。

したがって, 線分 A'B' 上にも奇数個 ($= 2d - 1$) の格子点が存在する.(終)

(2) 条件から

$$\overrightarrow{AB} = 10(x_1, y_1), \quad \overrightarrow{AC} = 10(x_2, y_2)$$

とおくと三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10^2 |x_1 y_2 - x_2 y_1| = 50 \underbrace{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}_{\text{整数}}$$

となり, S は 50 ので割り切れる整数である. (答)

55

図形問題

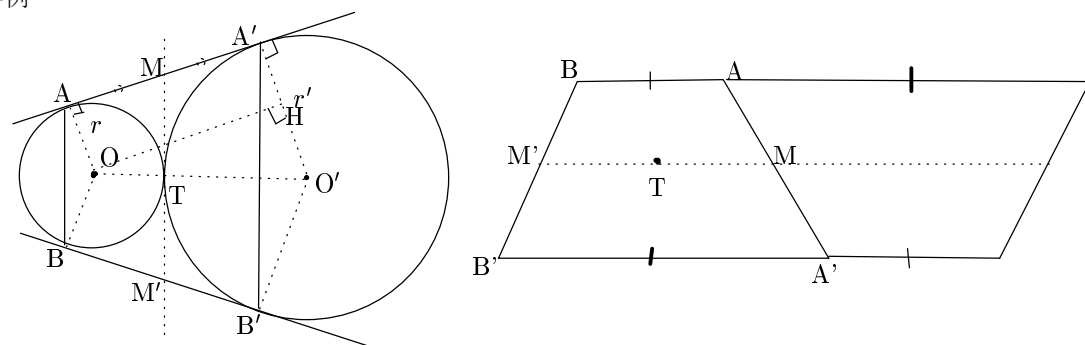
半径 r, r' の 2 つの円 O, O' が点 T で外接する。 T での共通接線以外の共通接線が円 O と接する点を A, B とし、円 O' と接する点を A', B' とするとき

(1) $AA' = \frac{1}{2}(AB + A'B')$ を証明せよ。

(2) $AA' = 2\sqrt{rr'}$ を証明せよ。

(3) AB の長さを r, r' で表せ。

—解答例—



(1)

T における接線と直線 AA', BB' との交点をそれぞれ M, M' とすると

$$MA = MT = MA' = M'B = M'T = M'B'$$

M, M' は線分 AA', BB' の中点である。また、 T は MM' の中点。

よって、左図と右図から

$$2AA' = 2MM' = AB + A'B' \quad \therefore AA' = \frac{1}{2}(AB + A'B') \quad (\text{終})$$

(2)

直角三角形 $OO'H$ において、三平方の定理から

$$OH^2 = OO'^2 - O'H^2 = (r + r')^2 - (r' - r)^2 = 4rr'$$

$$\therefore OH = AA' = 2\sqrt{rr'} \quad (\text{終})$$

(3)

$OA \parallel O'A', AB \parallel A'B'$ などから

$$\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$$

ここで、 $AB : A'B' = r : r'$ であるから

$$AA' = 2\sqrt{rr'} = \frac{1}{2} \left(AB + \frac{r'}{r} AB \right) = \frac{r + r'}{2r} AB$$

$$\therefore AB = \frac{4r\sqrt{rr'}}{r + r'} \quad (\text{答})$$

56

論証

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数であるとき、 $\log_2 n$ が整数でない有理数となることは、ないことを証明せよ。

—解答例—

(1)

$$\log_2 3 = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数}) \text{ とすると}$$

$$2^{\frac{q}{p}} = 3 \iff 2^q = 3^p$$

左辺は偶数で、右辺は奇数となり不合理。よって、 $\log_2 3$ は無理数。(終)

(2)

(i) $n = 1$ のとき、 $\log_2 1 = 0$ となりこれは整数である。

(ii) $n \geq 2$ のとき

$$\log_2 n = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な正の整数}) \text{ と仮定する。}$$

$$2^{\frac{q}{p}} = n \iff 2^q = n^p$$

n は 2^m (m は正整数) の形になるから、 $2^q = 2^{mp}$

$$\text{よって、} q = mp \iff m = \frac{q}{p} \text{ であるから、} p = 1$$

ゆえに $\frac{q}{p} = q (= m)$ と表され、 $\log_2 n$ が有理数ならば、整数である。(終)

57

確率

数直線上を原点から右（正の向き）に硬貨を投げて進む。表が出れば1進み、裏が出れば2進むものとする。このようにして点 n に到達する確率を P_n で表す。ただし、 n は自然数とする。 $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2}$ とする。

- (1) 3以上の n について、 P_n と P_{n-1}, P_{n-2} との関係式を求めよ。
- (2) P_n ($n \geq 3$) を求めよ。

—解答例—

(1)

1つ前の試行の結果、点 $n-1, n-2$ にある場合を考えて

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2} \quad (\text{答})$$

(2)

$n \geq 2$ の場合まで拡張して考える。

(1) の結果から、次の変形ができる。

$$P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}(P_n - P_{n-1})$$

$\vdots$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (P_1 - P_0)$$

$$\therefore P_{n+1} - P_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = P_n + \frac{1}{2}P_{n-1} \text{より,}$$

$$P_n + \frac{1}{2}P_n = \cdots \cdots = P_1 + \frac{1}{2}P_0 = 1$$

$$\therefore P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から求める P_n は

$$P_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad (\text{答})$$

58

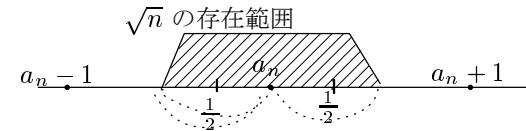
整数…数列

自然数 n に対して、 $\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする。

- (1) m を自然数とすると、 $a_n = m$ となる自然数 n の個数を m を用いて表せ。
- (2) $\sum_{k=1}^{2006} a_k$ を求めよ。

—解答例—

(1) a_n は、 $\sqrt{n}$ に最も近い整数であるから、図のような位置関係にある。



$$\text{したがって, } a_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} \leq a_n + \frac{1}{2}$$

$$a_n = m \text{ より, } m - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} \leq m + \frac{1}{2} \quad \therefore \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \leq n \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n \leq m^2 + m + \frac{1}{4}$$

m, n は整数であるから、

$m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m$ で、これを満たす整数 n の個数は

$$(m^2 + m) - (m^2 - m + 1) + 1 = 2m \quad (\text{答})$$

(2) この数列 $\{a_n\}$ を書き並べてみると

$$(1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3, 3), \cdots \cdots \overbrace{(l, l, l, \dots, l)}^{l \text{ 個}}$$

これを群数列とみて、第 l 群には $2l$ 個の l が並んでいる。

a_{2006} が第 l 群に属するとすれば

第 $l-1$ 群までの項数が、 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(l-1) = (l-1)l$

$$\therefore (l-1)l < 2006 \leq l(l+1) \text{ を満たす正の整数 } l \text{ は, } l = 45$$

したがって、第 44 群までの項数は、 $44 \times 45 = 1980$ 個であるから、

a_{2006} は第 45 群の 26 番目の数である。

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{2006} a_k &= \sum_{j=1}^{44} j \cdot (2j) + (45 \times 26) \\ &= \frac{44 \cdot 45 \cdot 89}{3} + 1170 = 59910 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

59

図形… 論証

四面体 ABCD において、 $AB \perp CD$ であるとき、点 A から平面 BCD に下ろした垂線と、点 B から平面 ACD に下ろした垂線は交わることを証明しなさい。

—解答例—

点 A から平面 BCD に下ろした垂線と平面の交点を H とする。

$AH \perp CD$

また、仮定から、 $AB \perp CD$ であるから

CD は平面 ABH に垂直である。

平面 ABH と平面 ACD との交線を AL とすると、

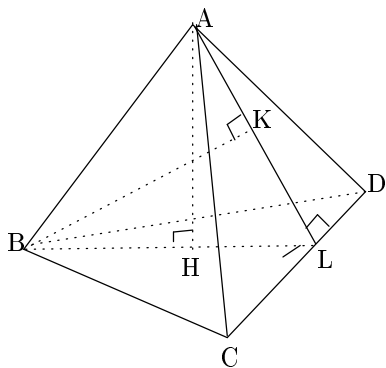
$AL \perp CD$ $BL \perp CD$

したがって、点 B から平面 ACD に垂線 AK を下ろすと、

$AK \perp CD$, $AK \perp AL$

であるから、AK は平面 ABH 上にあり、かつ、AL 上にある。

よって、AH と BK は 1 点で交わる。(終)



別解

ベクトルを利用して、考えてみよう。(略)

60

帰納法

$a = \sin^2 \frac{\pi}{5}$, $b = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ とおく。このとき、次のことが成りたつことを証明せよ。

(1) $a + b$ および ab は有理数である。

(2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n} + b^{-n})(a + b)^n$ は整数である。

—解答例—

(1)

$\angle B$ の二等分線と AC の交点を D とする。

右図において、 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$

$$\therefore 1 : x = x : (1 - x) \quad \therefore x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{5}$ において、

$$\cos 2\theta = \frac{1-x}{2x} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$a = \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$b = 1 - \cos^2 2\theta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{4}, \quad ab = \frac{5}{16} \text{ となり,}$$

$a + b$, ab はともに有理数 (終)

(2)

$$(a^{-n} + b^{-n})(a + b)^n = \frac{a^n + b^n}{(ab)^n} \times (a + b)^n = f(n) \text{ が整数であることを示す。}$$

$$f(n) = \left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{16}} \right)^n (a^n + b^n) = 4^n (a^n + b^n)$$

$$1. n = 1 \text{ のとき, } f(1) = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \text{ となり, 成立。}$$

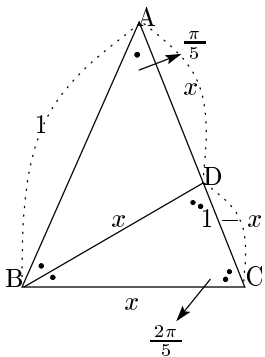
$$2. n = k, k + 1 \text{ (} k \geq 1 \text{ なる整数) のとき, } f(k), f(k + 1) \text{ が整数であると仮定する。}$$

$$n = k + 2 \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} f(k + 2) &= 4^{k+2} (a^{k+2} + b^{k+2}) = 4^{k+2} \{ (a^{k+1} + b^{k+1})(a + b) - ab(a^k + b^k) \} \\ &= 5 \cdot 4^{k+1} (a^{k+1} + b^{k+1}) - 5 \cdot 4^k (a^k + b^k) \\ &= 5 \times f(k + 1) - 5 \times f(k) \text{ となり,} \end{aligned}$$

仮定より、 $f(k + 2)$ は整数である。

数学的帰納法により、任意の自然数 n について題意は成立する。(終)



61

整数・・・論証

p および n を 2 以上の整数とすると、整数

$$p^n + (1-p)n - 1$$

は整数 $(p-1)^2$ で割り切れることを証明しなさい.

—解答例—

証明①

$p-1=x$ とおく.

$$\begin{aligned} p^n + (1-p)n - 1 &= (x+1)^n - nx - 1 \\ &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}x + 1 - nx - 1 \\ &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + x^2 \\ &= x^2({}_nC_0x^{n-2} + {}_nC_1x^{n-3} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + 1) \\ &\quad \text{となり,} \\ x^2 &= (p-1)^2 \text{ で割り切れる. (終)} \end{aligned}$$

証明②

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ であることを利用すると,

$$\begin{aligned} p^n + (1-p)n - 1 &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + 1) - n(p-1) \\ &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 - n) \\ &= (p-1)\{(p^{n-1} - 1) + (p^{n-2} - 1) + \cdots + (p - 1)\} \\ &= (p-1)^2\{(p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + 1) + (p^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + 1\} \\ &\quad \text{以上により, 題意の式は } (p-1)^2 \text{ で割り切れる. (終)} \end{aligned}$$

別解

(オプショントして・・・微分)

一般に, 整式「 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる $\iff f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ 」

$f(p) = p^n + (1-p)n - 1$ とおく.

$f(1) = 0$ また, $f'(p) = np^{n-1} - n$ より, $f'(1) = n - n = 0$

よって, $f(p)$ は $(p-1)^2$ で割り切れる.(終)

62

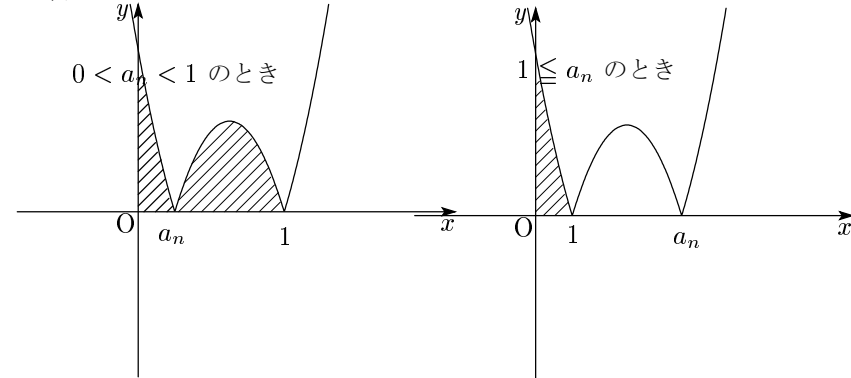
積分

数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) を次の式で定める.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 6 \int_0^1 |(x-a_n)(x-1)| dx$$

このとき, a_n を求めよ.

—解答例—



(i) $0 < a_n < 1$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \int_0^{a_n} (x-a_n)(x-1) dx - 6 \int_{a_n}^1 (x-a_n)(x-1) dx \\ &= [2x^3 - 3(a_n+1)x^2 + 6a_nx]_0^{a_n} + 6 \cdot \frac{1}{6}(1-a_n)^3 \\ &= -2a_n^3 + 6a_n^2 - 3a_n + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a_n$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \int_0^1 (x-a_n)(x-1) dx \\ &= [2x^3 - 3(a_n+1)x^2 + 6a_nx]_0^1 \\ &= 3a_n - 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$a_2 = -2 \cdot \frac{1}{2^3} + 6 \cdot \frac{1}{2^2} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \quad (\because a_1 = \frac{1}{2})$$

$$a_3 = -2 \left(\frac{3}{4} \right)^3 + 6 \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 3 \left(\frac{3}{4} \right) + 1 = \frac{41}{32}$$

② より, $n \geq 3$ のとき, $a_n \geq 1$ ならば, $a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 2 > 1$

$\therefore n \geq 3$ のとき, $a_{n+1} = 3a_n - 1$ であるから,

$$a_n - \frac{1}{2} = 3 \left(a_{n-1} - \frac{1}{2} \right) = \cdots = 3^{n-3} \left(a_3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} + \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{25}{32} \cdot 3^{n-3} \quad (n \geq 3) \cdots (\text{答})$$

63

整数…論証

n を自然数とする.

(1) $\sqrt{n^2 - 9n - 1}$ が整数となるような n の値をすべて求めよ.

(2) $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数であることを証せ.

—解答例—

(1)

$\sqrt{n^2 - 9n - 1} = m$ (m は正の整数) とおく.

$n^2 - 9n - 1 = m^2 \iff 4n^2 - 4 \cdot 9n - 4 = 4m^2$ であるから

$(2n - 9)^2 - (2m)^2 = 85 \iff (2n - 9 + 2m)(2n - 9 - 2m) = 85$

$n^2 - 9n - 1 \geq 0$ であるから, $n(n - 9) \geq 1 \quad \therefore n \geq 10$

よって, $2n - 9 + 2m, 2n - 9 - 2m > 0$ で, $2n - 9 + 2m > 2n - 9 - 2m$ であるから

① $\begin{cases} 2n - 9 + 2m = 17 \\ 2n - 9 - 2m = 5 \end{cases}$ または, ② $\begin{cases} 2n - 9 + 2m = 85 \\ 2n - 9 - 2m = 1 \end{cases}$

の場合があり, ① のとき, $(n, m) = (10, 3)$, ② のとき, $(n, m) = (26, 21)$

$\therefore n = 10, 26 \dots$ (答)

(2)

$n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$ であるから, $\sqrt{n(n+1)}$ は整数ではない.

$\sqrt{n(n+1)} = \frac{p}{q}$ (p, q は互いに素な整数) とすると,

$n(n+1) = \frac{p^2}{q^2}$ より, 左辺は正の整数であるから, $q^2 = 1$

このとき, $n(n+1) = p^2 \iff \sqrt{n(n+1)} = |p|$ となり, $n(n+1)$ が整数となる. (これはありえない)

ゆえに, $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数である. (答)

64

三角関数

x について恒等的に

$$\sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x + 2\alpha) = 0$$

が成り立つように定数 α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) を定めよ.

—解答例—

解 1

(必要条件から)

$x = 0, \frac{\pi}{2}$ について成り立つことが必要である.

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0 \dots\dots ① \\ 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0 \dots\dots ② \end{cases}$$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ であるから, ①, ② より

$$(-\sin \alpha)^2 + (-1 - \cos \alpha)^2 = 1 \quad \therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

これから, $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ を得る.

逆に, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ のとき, 与式は

$$\sin x + \sin x \cos \frac{2}{3}\pi + \cos x \sin \frac{2}{3}\pi + \sin x \cos \frac{4}{3}\pi + \cos x \sin \frac{4}{3}\pi = 0$$

となり, 成立する. $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ のときも同様. よって十分条件でもある.

以上により, $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \dots$ (答)

別解

(式を変形する)

与式を変形して

$$2 \sin \frac{(x+2\alpha)+x}{2} \cos \frac{(x+2\alpha)-x}{2} + \sin(x+\alpha) = 0$$

$$\therefore \sin(x+\alpha)(2 \cos \alpha + 1) = 0 \dots\dots ③$$

③ はすべての x について成り立つから,

$$2 \cos \alpha + 1 = 0 \iff \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

別解 2

$$\sin x + \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha + \sin x \cos 2\alpha + \cos x \sin 2\alpha = 0$$

$$(1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha) \sin x + (\sin \alpha + \sin 2\alpha) \cos x = 0 \quad (\text{左辺を合成して})$$

$\therefore \sqrt{(1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha)^2 + (\sin \alpha + \sin 2\alpha)^2} \sin(x + \beta) = 0$ から, ①, ② を得る. (あとは同様)