

第 1 問

A,B,C の 3 人のうち 2 人が, 1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き, 大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する.

ただし, 最初に A と B が対戦し, その後は, 直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また, カードを引く順番は最初は A から, その後は直前の対戦の勝者からとする。なお, 対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし, 引いたカードは対戦後直ちに元の束に戻すものとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3) 5 回の対戦を行うとき, A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

第 2 問

$f(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とする。ただし, a, b は実数の定数であり, $a \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $f(x) = 0$ のすべての解が区間 $-1 \leq x \leq 1$ に含まれる実数解であるための条件を, a, b に関する不等式で表せ。

(2) 座標平面上で, (1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の集合が表す領域を D とする。 D の概形を描き, その面積を求めよ。

第 3 問

方程式 $y = x^2$ で与えられる座標平面上の放物線を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。 C 上の点 P をどのように選んでも、 P を行列 A で表される移動によって移した点がまた C 上にあるとき、 A の成分 a, b, c, d がみたす条件を求めよ。
- (2) 2 点 $Q(-1, 1)$, $Q'(1, -1)$ をとり、 Q' を通り、線分 QQ' と直交する直線を ℓ とする。 C 上の点 P を行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ で表される移動によって移した点を P' とするとき、 P' から Q までの距離と P' から ℓ までの距離が等しくなるような α の値を求めよ。

第 4 問

関数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq \frac{3}{4\pi}$ ならば、 $f'(x) > 0$ であることを示せ。
- (2) $b \geq a > 0$, $b \geq \frac{2}{\pi}$ のとき,

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b) \leq b-a$$

が成り立つことを示せ。