

第 1 問

A,B,C の 3 人のうち 2 人が、1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き、大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし、最初に A と B が対戦し、その後は、直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また、カードを引く順番は最初は A から、その後は直前の対戦の勝者からとする。なお、対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし、引いたカードは対戦後直ちに元の束に戻すものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。
- (2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。
- (3) 5 回の対戦を行うとき、A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

—解答例—

- (1) すべての場合は、 13×12 通りで、A が勝つのは ${}_{13}C_2$ 通り、よって求める確率は、

$$\frac{{}_{13}C_2}{13 \cdot 12} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

- (2) A が 4 回戦に出場するのは次の場合がある。

(○… 勝, △… 休み, ×… 負) とする。

①	②	③	確率
○	○	○	$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
○	×	△	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$
×	△	○	$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\text{求める確率は、} \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \quad (\text{答})$$

- (3) A が最初に連勝 (2 連勝) する場合は次の通りである。() 内は勝者。

①	②	③	④	⑤	確率
○	○				$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
○	×	(C)	△ (B)	○	$(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{32}$
×	(B)	△ (C)	○	○	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$

よって求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32} \quad (\text{答})$$

第 2 問

$f(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とする。ただし、 a, b は実数の定数であり、 $a \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式 $f(x) = 0$ のすべての解が区間 $-1 \leq x \leq 1$ に含まれる実数解であるための条件を、 a, b に関する不等式で表せ。
- (2) 座標平面上で、(1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の集合が表す領域を D とする。 D の概形を描き、その面積を求めよ。

—解答例—

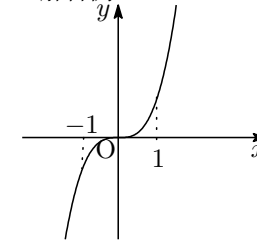


図 1

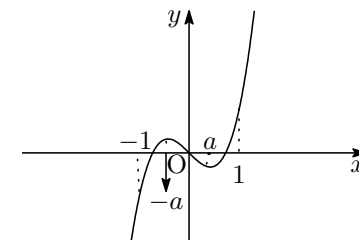


図 2

- (1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ であるから、
 - (i) $a = 0$ のとき、 $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\therefore f(x)$ は単調増加.(図 1)
 $f(x) = x^3 - b = 0$ の解がすべて実数で、 $-1 \leq x \leq 1$ を満たすための条件は、
 $b = 0$ $\therefore a = b = 0 \cdots \textcircled{1}$ (図 1)このとき、3 重解 0 をもち適する。

- (ii) $a > 0$ のとき、 $f'(x) = 3(x+a)(x-a)$ で

x		$-a$		a	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$2a^3 - b$	↘	$-2a^3 - b$	↗

条件より、図 2 のようになることであり、

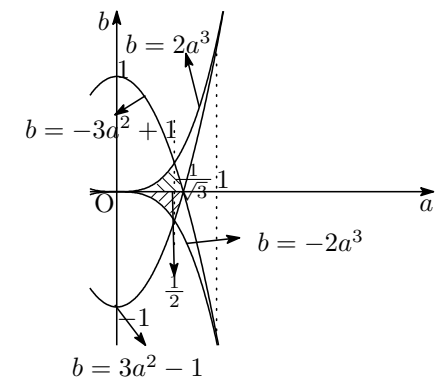
$$2a^3 - b \geq 0, -2a^3 - b \leq 0, f(-1) \leq 0, f(1) \geq 0 \text{ かつ、} 0 < a \leq 1 \cdots \textcircled{2}$$

①,② から、求める条件は

$$b \geq 3a^2 - 1, b \leq -3a^2 + 1, b \leq 2a^3, b \geq -2a^3, 0 \leq a \leq 1 \quad (\text{答})$$

- (2) 求める点 (a, b) の範囲は図の斜線部分で境界を含む。図の対称性から、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 2a^3 da + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} (-3a^2 + 1) da \\ &= \left[a^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2a - 2a^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{16} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} - \frac{11}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



第 3 問

方程式 $y = x^2$ で与えられる座標平面上の放物線を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。 C 上の点 P をどのように選んでも、 P を行列 A で表される移動によって移した点がまた C 上にあるとき、 A の成分 a, b, c, d がみたす条件を求めよ。
- (2) 2 点 $Q(-1, 1)$, $Q'(1, -1)$ をとり、 Q' を通り、線分 QQ' と直交する直線を ℓ とする。 C 上の点 P を行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ で表される移動によって移した点を P' とするとき、 P' から Q までの距離と P' から ℓ までの距離が等しくなるような α の値を求めよ。

—解答例—

(1)

点 P の座標を、 (t, t^2) とおく。 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + bt^2 \\ ct + dt^2 \end{pmatrix}$

条件より、これが曲線 C 上の点であるから、

$$ct + dt^2 = (at + bt^2)^2 \iff ct + dt^2 = a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4$$

t についての恒等式であるから

$$c = 0, \quad d = a^2, \quad 0 = 2ab, \quad 0 = b$$

よって求める条件は、 $b = c = 0, d = a^2$ (答)

- (2) $P(t, t^2)$ に対して、 $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \alpha t^2 \\ t + \alpha t^2 \end{pmatrix} \therefore P'(t - \alpha t^2, t + \alpha t^2)$

$\overrightarrow{QQ'} = (2, -2) = 2(1, -1)$ であるから、 ℓ の式は

$$(x - 1) - (y + 1) = 0 \quad \therefore \ell: x - y - 2 = 0$$

条件より

$$\sqrt{(t - \alpha t^2 + 1)^2 + (t + \alpha t^2 - 1)^2} = \frac{|(t - \alpha t^2) - (t + \alpha t^2) - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{2(t^2 + (\alpha t^2 - 1)^2)} = \sqrt{2}|\alpha t^2 + 1|$$

$$t^2 + \alpha^2 t^4 - 2\alpha t^2 + 1 = \alpha^2 t^4 + 2\alpha t^2 + 1$$

$$\therefore t^2(1 - 4\alpha) = 0 \iff t = 0, \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \text{(i)} & t = 0 \text{ のとき, } \alpha \text{ は任意} \\ \text{(ii)} & \alpha = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

第 4 問

関数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq \frac{3}{4\pi}$ ならば、 $f'(x) > 0$ であることを示せ。

- (2) $b \geq a > 0$, $b \geq \frac{2}{\pi}$ のとき、

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b - a)f(b) \leq b - a$$

が成り立つことを示せ。

—解答例—

証明

- (1) $f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} = t \quad \left(0 < t \leq \frac{4}{3}\pi\right) \text{ とおく. } f'(x) = \sin t - t \cos t = g(t) \text{ とおいて,}$$

$$g'(t) = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

増減表を考えて

t	0		π		$\frac{4}{3}\pi$
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	π	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

ここで、 $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi > 0$ であるから、

$$0 < t \leq \frac{4}{3}\pi \text{ のとき, } g(t) > 0 \quad \therefore f'(x) > 0 \quad \left(x \geq \frac{4}{3\pi}\right) \text{ (終)}$$

- (2) $a < b$ のとき、 $h(b) = \int_a^b f(x)dx$ とおく、閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能であるから、平均値の定理から

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)h'(c) = (b - a)f(c) \quad \text{となる } c (a < c < b) \text{ が存在する.}$$

- (1) $b \geq \frac{2}{\pi} > \frac{4}{3\pi}$ であるから、(1) より、 $f(x)$ は単調増加.

$$\therefore f(a) \leq f(c) \leq f(b) \text{ より, } \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)f(b)$$

$$b - a - (b - a)f(b) = (b - a)\{1 - f(b)\} \text{ において, } 1 - f(b) = 1 - b \sin \frac{1}{b} \cdots (*)$$

$$\frac{1}{b} = u \text{ とおくと, } b \geq \frac{2}{\pi} \text{ より, } 0 < u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(*) \text{ は, } 1 - \frac{1}{u} \sin u = \frac{u - \sin u}{u}$$

$$I(u) = u - \sin u \text{ において, } I'(u) = 1 - \cos u > 0 \quad \therefore I(u) \text{ は単調増加.}$$

$$I(u) > I(0) = 0 \text{ より, } (b - a)f(b) \leq b - a$$

$a = b$ のときは、すべての辺が 0 となり、明らかに成立.

$$\therefore \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)f(b) \leq b - a \quad \text{(終)}$$