

第 1 問 (配点 20)

[1] 方程式

$$2(x-2)^2 = |3x-5| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) 方程式① を満たす解のうち、 $x < \frac{5}{3}$ を満たす解は

$$x = \boxed{\text{ア}}, \quad \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) 方程式① の解は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。その解のうちで最大のものを α とすると、 $m \leq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{オ}}$ である。

[2] 集合 A, B を

$$A = \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ で割り切れる自然数} \}$$

$$B = \{n \mid n \text{ は } 4 \text{ で割り切れる自然数} \}$$

とする。

(1) 次の $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを、したの① ～④ のうちから一つずつ選べ。

自然数 n が A に属することは、 n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$

自然数 n が B に属することは、 n が 20 で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$

- ① 必要十分条件である. ① 必要条件であるが、十分条件でない.
 ② 十分条件であるが、必要条件でない. ③ 必要条件でも十分条件でもない.

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを、したの⑤ ～⑦ のうちから一つずつ選べ。

$$C = \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ と } 4 \text{ のいずれでも割り切れる自然数} \}$$

$$D = \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ でも } 4 \text{ でも割り切れない自然数} \}$$

$$E = \{n \mid n \text{ は } 20 \text{ で割り切れない自然数} \}$$

とする。自然数全体の集合を全体集合とし、その部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ で表すとき、

$$C = \boxed{\text{ク}}, \quad D = \boxed{\text{ケ}}, \quad E = \boxed{\text{コ}}$$

である。

- ① $A \cup B$ ① $A \cup \overline{B}$ ② $\overline{A} \cup B$ ③ $\overline{A \cup B}$
 ④ $A \cap B$ ⑤ $A \cap \overline{B}$ ⑥ $\overline{A} \cap B$ ⑦ $\overline{A \cap B}$

第 2 問 (配点 25)

a を定数とし、 x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

のグラフを G とする。

(1) グラフ G が表す放物線の頂点の座標は

$$\left(a - \boxed{\text{ア}}, a^2 - \boxed{\text{イ}}a + \boxed{\text{ウ}} \right)$$

である。グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$\boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}} < a < \boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

のときである。さらに、この二つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}} < a < \boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(2) グラフ G が表す放物線の頂点の x 座標が 3 以上 7 以下にあるとする。

このとき、 a の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} \leq a \leq \boxed{\text{サ}}$$

であり、2 次関数① の $3 \leq x \leq 7$ における最大値 M は

$$\boxed{\text{コ}} \leq a \leq \boxed{\text{シ}} \text{ のとき } M = \boxed{\text{ス}}a^2 - \boxed{\text{セソ}}a + \boxed{\text{タチ}}$$

$$\boxed{\text{シ}} \leq a \leq \boxed{\text{サ}} \text{ のとき } M = \boxed{\text{ツ}}a^2 - \boxed{\text{テト}}a + \boxed{\text{ナニ}}$$

である。したがって、2 次関数① の $3 \leq x \leq 7$ における最小値が 6 であるならば

$$a = \boxed{\text{ヌ}} + \boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

であり、最大値 M は

$$M = \boxed{\text{ハヒ}} - \boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

第 3 問 (配点 30)

△ABC において、 $AB = 2$ 、 $BC = \sqrt{5} + 1$ 、 $CA = 2\sqrt{2}$ とする。また、△ABC の外接円の中心を O とする。

(1) このとき、 $\angle ABC = \boxed{\text{アイ}}$ °であり、外接円 O の半径は

$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) 円 O の円周上に点 D を、直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にする。△ABD の面積を S_1 、△BCD の面積を S_2 とするとき

$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5} - 1 \qquad \cdots \cdots \text{①}$

であるとする。 $\angle BAD + \angle BCD = \boxed{\text{カキク}}$ °であるから

$CD = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} AD$ となる。このとき、

$CD = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

さらに、2 辺 AD、BC の延長の交点を E とし、△ABE の面積を S_3 、△CDE の面積を S_4 とする。このとき

$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \qquad \cdots \cdots \text{②}$

である。① と② より

$\frac{S_2}{S_4} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$

となる。

第 4 問 (配点 25)

1 辺の長さ 1 の正六角形があり，その頂点の一つを A とする。一つのさいころを 3 回投げ，点 P を次の (a)，(b)，(c) にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

- (a) 頂点 A から出発して，1 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。
- (b) 1 回目に点 P がとまった位置から出発して，2 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。
- (c) 2 回目に点 P がとまった位置から出発して，3 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

- (1) 3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を一周して，ちょうど頂点 A に到達する目の出方は アイ 通りである。
- 3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にはとまらない目の出方は ウエオ 通りである。

- (2) 3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は $\frac{\text{カ}}{\text{キクケ}}$ であり，ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる確率は $\frac{\text{コ}}{\text{サシ}}$ である。

3 回進める間にちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は $\frac{\text{スセ}}{\text{ソタ}}$ である。

- (3) 3 回進める間に頂点 A にとまる回数の期待値は $\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ 回である。

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] 不等式

$$\sin 2x > \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

を満たす x の範囲を求めよう。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ とする。

$a = \sin x$, $b = \cos x$ とおくと、与えられた不等式は

$$\boxed{\text{ア}} ab + \boxed{\text{イ}} a - \boxed{\text{ウ}} b - 1 > 0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} < x < \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi, \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi < x < \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \pi$$

である。

[2] 不等式

$$2 + \log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2 \log_y \left(1 - \frac{x}{2} \right)$$

の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y > \boxed{\text{サ}}$, $y \neq \boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x < \boxed{\text{ス}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。また、

$$\log_{\sqrt{y}} 3 = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y}, \quad \log_y 81 = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$$

であるから、与えられた不等式は

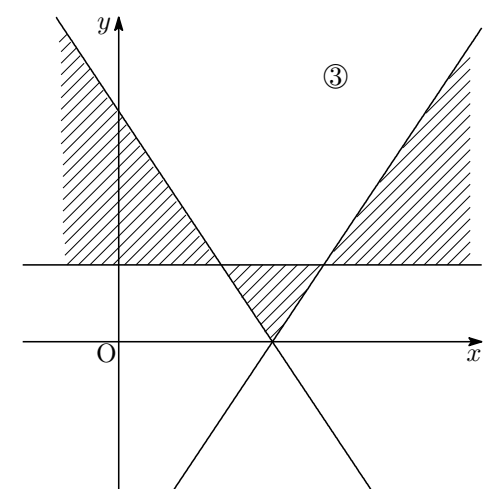
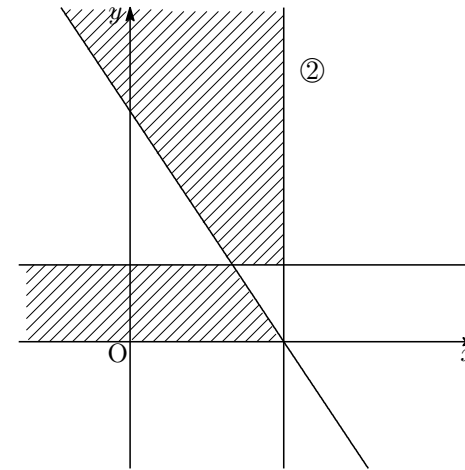
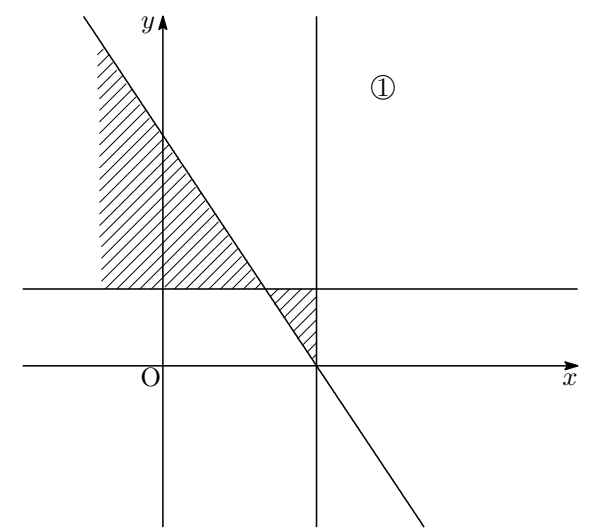
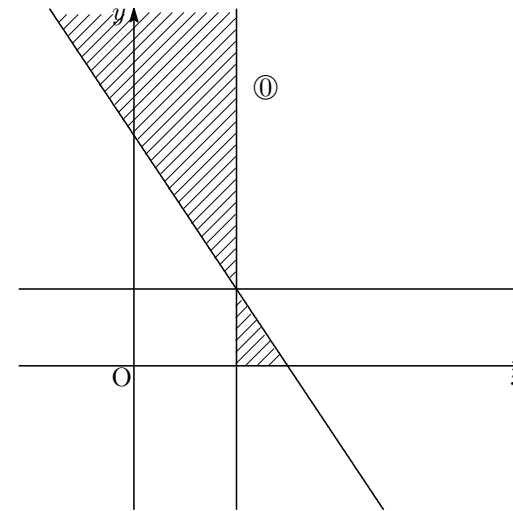
$$1 < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y} + \frac{\log_3 \left(1 - \frac{x}{2} \right)}{\log_3 y}$$

となる。よって

$$y > \boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき,} \quad \log_3 y < \log_3 \left\{ \boxed{\text{ツ}} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right\}$$

$$\boxed{\text{テ}} < y < \boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき,} \quad \log_3 y > \log_3 \left\{ \boxed{\text{ツ}} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right\}$$

求める領域を図示すると、図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。ただし、境界線は含まない。 $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから1つ選べ。



第2問 (必答問題) (配点 30)

$a > 0$ として、 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - x$$

$$g(x) = f(x - a) + 2a$$

とする。

(1) 二つの関数の差 $g(x) - f(x)$ は

$$g(x) - f(x) = a \left(\text{アイ} x^2 + \text{ウ} ax - a^2 + \text{エ} \right)$$

と表され、 x の方程式 $g(x) - f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の範囲は

$$0 < a < \text{オ} \sqrt{\text{カ}}$$

である。また、 $g(x) - f(x)$ は $x = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ のとき、最大値

$$\frac{a}{\text{ケ}} \left(\text{コサ} - a^{\text{シ}}$$

をとる。

(2) (1) で得られた最大値を

$$h(a) = \frac{a}{\text{ケ}} \left(\text{コサ} - a^{\text{シ}} \right)$$

と表す。 $h(a)$ を a の関数と考えるとき、 $h(a)$ は $a = \text{ス}$ で最大値 セ をとる。

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の二つの交点 P, Q の座標は

$$P \left(\text{ソ}, 0 \right), \quad Q \left(\sqrt{\text{タ}}, \text{チ} \sqrt{\text{ツ}} \right)$$

であり、二つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{\text{テ}}{\text{ト}}$$

である。さらに、点 P $\left(\text{ソ}, 0 \right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と曲線 $y = g(x)$ の接線がなす角を

$\theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると

$$\tan \theta = \frac{\text{タ}}{\text{チ}}$$

である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

三つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は、初項が -27 で漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 60 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。このとき

$$a_n = \boxed{\text{ア}}^n - \boxed{\text{イウ}}$$

である。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \left(\boxed{\text{カ}}^n - \boxed{\text{キ}} \right) - \boxed{\text{イウ}} n$$

である。また、 $S_n > 0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 第 n 項が $2b_n + c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n + c_n\}$ は、初項が 0 で公差が d の等差数列になり、第 n 項が $b_n - 2c_n$ で与えられる数列 $\{b_n - 2c_n\}$ は、初項が x で公比が r の等比数列になるとする。このとき $b_n + c_n$ は

$$b_n + c_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} d(n-1) - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} x r^{n-1}$$

と表される。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は (1), (2) を満たすとする。さらに、第 n 項が $b_n + c_n$ で与えられる数列 $\{b_n + c_n\}$ の階差数列は、数列 $\{a_n\}$ であるとする。このとき

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} d + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} x(1-r)r^{n-1}$$

であるから、(1) より

$$r = \boxed{\text{ス}}, \quad x = \frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}, \quad d = \boxed{\text{ツテト}}$$

である。したがって、数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の第 n 項は、それぞれ

$$b_n = -\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}^n - \boxed{\text{ヌネ}}(n-1)$$

$$c_n = \boxed{\text{ノ}}^n - \boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$

である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(−2, −1, −2) がある。 $0 < a < 1$ とし、線分 AB を $a : (1 - a)$ に内分する点を E、線分 CD を $a : (1 - a)$ に内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{EF}$ は $\overrightarrow{a}$ を用いて

$$\overrightarrow{EF} = \left(\boxed{\text{アイ}} a, \boxed{\text{ウエ}} a, \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} a \right)$$

と表される。さらに、 $\overrightarrow{EF}$ が $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるのは $a = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。 $0 < b < 1$ として、線分 EF を $b : (1 - b)$ に内分する点を G とする。 $\overrightarrow{OG}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}} b}{\boxed{\text{サ}}}, \frac{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}} b}{\boxed{\text{サ}}}, \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)$$

と表される。

(3) (2) において、直線 OG と直線 BC が交わる時の b の値と、その交点 H の座標を求めよう。

点 H は直線 BC 上にあるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{BH} = s \overrightarrow{BC}$ と表される。また、ベクトル $\overrightarrow{OH}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OH} = t \overrightarrow{OG}$ と表される。よって

$$b = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}, \quad s = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}, \quad t = \boxed{\text{テ}}$$

である。したがって、点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \boxed{\text{ネ}} \right)$$

である。また、点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}} : 1$ に外分する。

第 1 問

[1]

(1) $x < \frac{5}{3}$ のとき,

$$2(x-2)^2 = 5-3x \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\iff (x-1)(2x-3) = 0 \iff x = 1, \frac{3}{2}$$

これらは共に $x < \frac{5}{3}$ を満たしている. $\therefore x = 1, \frac{3}{2}$ (答)

(2) $x \geq \frac{5}{3}$ のとき,

$$2(x-2)^2 = 3x-5 \iff 2x^2 - 11x + 13 = 0$$

$$\iff x = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{11 + \sqrt{17}}{4} > \frac{5}{3}, \text{ また,}$$

$$\frac{11 - \sqrt{17}}{4} - \frac{5}{3} = \frac{13 - 3\sqrt{17}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{169} - \sqrt{153}}{12} > 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{17}}{4} > \frac{5}{3}, \text{ よって 2 解とも適する.}$$

$$\text{以上から, } x = 1, \frac{3}{2}, \frac{11 \pm \sqrt{17}}{4} \text{ の 4 個 (答)}$$

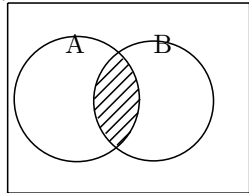
最大のものは, $\frac{11 + \sqrt{17}}{4}$ で, $3 < \frac{11 + \sqrt{17}}{4} < 4$ より, $m = 3$ (答)

[2]

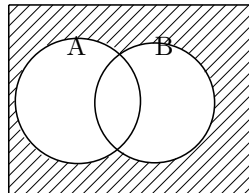
(1) 「 n が 10 で割り切れる」 $\implies$ 「 n は 2 で割り切れる」ので, マ は, 十分条件

「 n が 20 で割り切れる」 $\implies$ 「 n は 4 で割り切れる」ので, ミ は, 必要条件

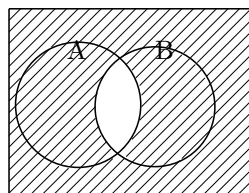
(2) ベン図を用いて



$$C = A \cap B$$



$$D = \overline{A \cup B}$$



$$E = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(答)

第 2 問

[1]

$$f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$$

とおく。

$$f(x) = \{x - (a-1)\}^2 + a^2 - 6a + 3$$

したがって,

頂点は,

$$(a-1, a^2 - 6a + 3) \text{ (答)}$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸である

から,

x 軸と異なる 2 点で交わる.

$$\iff a^2 - 6a + 3 < 0$$

$$\therefore 3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6} \text{ (答)}$$

二つの交点の x 座標が共に負になるのは

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 3 < 0 \iff 3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6} \cdots \textcircled{1} \\ \text{軸の式 } x = a - 1 < 0 \iff a < 1 \cdots \textcircled{2} \\ f(0) > 0 \iff 2a^2 - 8a + 4 = 2(a^2 - 4a + 2) > 0 \quad \therefore a < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < a \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①～③ より, 求める a の値の範囲は

$$3 - \sqrt{6} < a < 2 - \sqrt{2} \text{ (答)}$$

[2]

条件より, $3 \leq a-1 \leq 7 \iff 4 \leq a \leq 8$ (答)

$3 \leq x \leq 7$ のとき, 下に凸のグラフであることから最大値は

$$f(3) = 2a^2 - 14a + 19 \cdots \textcircled{4}$$

$$f(7) = 2a^2 - 22a + 67 \cdots \textcircled{5}$$

のいずれかの場合であり, 軸の位置を考えて, 最大値は

$$(i) 4 \leq a \leq 6 \text{ のとき, } M = f(7) = 2a^2 - 22a + 67$$

$$(ii) 6 \leq a \leq 8 \text{ のとき, } M = f(3) = 2a^2 - 14a + 19$$

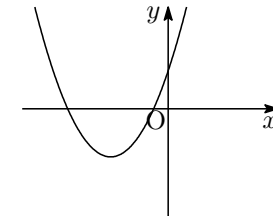
また, $4 \leq a \leq 8$ のとき, 頂点の x 座標は, $3 \leq x \leq 7$ を満たすので,

$$\text{最小値は, } a^2 - 6a + 3 = 6 \quad \therefore a = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$$4 \leq a \leq 8 \text{ より } a = 3 + 2\sqrt{3} \text{ (答)}$$

$$\text{最大値 } M = f(3) = 2a^2 - 14a + 19 = 2(a^2 - 6a + 3) - 2a + 13$$

$$= 2 \times 6 - 2(3 + 2\sqrt{3}) + 13 = 19 - 4\sqrt{3} \text{ (答)}$$



第 3 問

(1)

余弦定理より

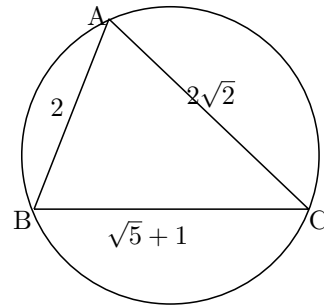
$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2 + 2^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ (答)

また, 正弦定理より

$$2R = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \quad \text{より}$$

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \quad \text{(答)}$$



(2)

右図において $\angle BAD + \angle BCD$

$= 180^\circ //$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin A$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \sin C$$

$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ である

から

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5} - 1 = \frac{AB \cdot AD}{CD \cdot CB}$$

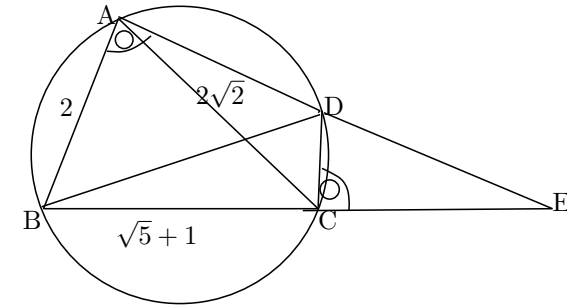
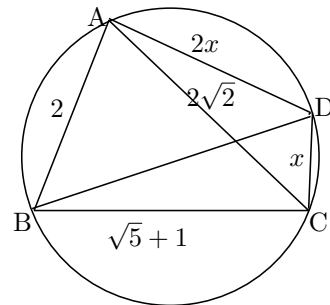
$$= \frac{2AD}{(\sqrt{5}+1)CD}$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2} = 2$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AD //$$

$CD = x$ とおくと, $AD = 2x$, 余弦定理から

$$8 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot (2x) \cos 120^\circ = 7x^2 \quad \therefore x = CD = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{7} \quad \text{(答)}$$



(3)

上図のように点 E をとると

$\angle BCD + \angle BAE = 180^\circ$ であるから,

$\angle DCE = \angle BAE$ また, $\angle E$ は共通である. $\therefore \triangle BAE \sim \triangle DCE$

面積比は相似比の平方に等しいから

$$\begin{aligned}\frac{S_3}{S_4} &= \frac{AB^2}{CD^2} \\ &= \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\frac{4}{49} \times 14} \\ &= \frac{7}{2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

$S_1 + S_2 + S_4 = S_3$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{S_3}{S_4} &= \frac{7}{2} \\ &= \frac{S_1 + S_2 + S_4}{S_4} = \frac{(\sqrt{5}-1)S_2 + S_2 + S_4}{S_4} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{5}S_2}{S_4} \\ \therefore \frac{\sqrt{5}S_2}{S_4} &= \frac{5}{2} \quad \text{より,}\end{aligned}$$

$$\frac{S_2}{S_4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{(答)}$$

第 4 問

(1) 1 回目から 3 回目までにである

目を, それぞれ x, y, z とすると,

$$x + y + z = 6 \quad (1 \leq x, y, z \leq 6)$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 4),$$

$(1, 2, 3), (2, 2, 2)$ の場合があり,

それぞれ, 3 通り, 6 通り. 1 通りで

あるから, $3 + 6 + 1 = 10$ 通り(答)

頂点 A に止まらないのは 3 回と

も B~F に止まる場合であるか

$$ら, 5^3 = 125 \text{ 通り (答)}$$

(2)

3 回の操作で 3 回とも頂点 A に止まるのは $(x, y, z) = (6, 6, 6)$ の場合の 1 通りである。すべての場合は

$6^3 = 216$ 通りあるから, 求める確率は

$$\frac{1}{216} \quad (\text{答})$$

A に 2 回止まるときは,

$(x, y, z) = (6, 6, \square) \square$ は 6 以外の 5 通り..

$(x, y, z) = (6, y, z) \quad (y + z = 6)$ のとき, $(y, z) = (1, 5), (2, 4), (3, 3)$ の場合があり, それぞれ, 2 通り, 2 通り, 1 通りであるから, 5 通りある。

$(x, y, z) = (x, y, 6) \quad (x + y = 6)$ の場合も 5 通り.

よって求める確率は

$$\frac{5 + 5 + 5}{216} = \frac{5}{72} \quad (\text{答})$$

A に 1 回だけ止まるとき

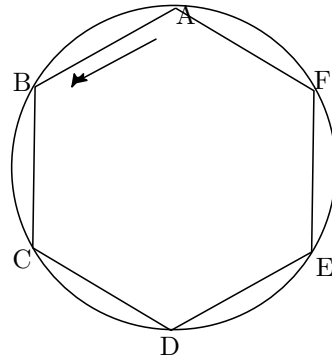
$216 - (1 + 15 + 125) = 75$ 通りである。よってその確率は

$$\frac{75}{216} = \frac{25}{72} \quad (\text{答})$$

(3)

以上により, 求める期待値は

$$3 \times \frac{1}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 1 \times \frac{75}{216} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$



(次の解答は, 2 年生の M 君の解答です。すっきりしていて Good です。♡)

別解

(2)

1 回の操作で頂点 A に止まる確率は $\frac{1}{6}$ で, それ以外で止まる確率は $\frac{5}{6}$

3 回の操作で 3 回 A に止まる確率は

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{1}{216} \quad (\text{答})$$

3 回の操作で 2 回 A に止まる確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{72} \quad (\text{答})$$

3 回の操作で 1 回 A に止まる確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{25}{72} \quad (\text{答})$$

第 1 問

[1]

与式を変形して

$$2 \sin x \cos x > \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

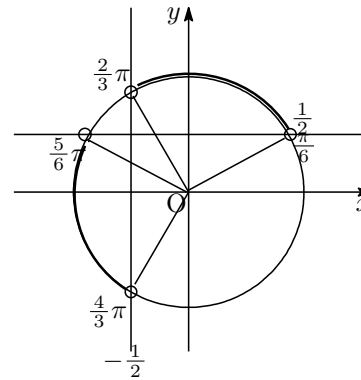
$$2ab > b - a + \frac{1}{2} \iff 4ab + 2a - 2b - 1 > 0 \quad (\text{答})$$

$(2a - 1)(2b + 1) > 0$ より

$$\begin{cases} a = \sin x > \frac{1}{2} \\ b = \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{または,} \quad \begin{cases} a = \sin x < \frac{1}{2} \\ b = \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

右図より, 求める範囲は

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi \quad (\text{答})$$



[2]

底の条件から, $y > 0, y \neq 1$ (答)

真数は正だから, $1 - \frac{x}{2} > 0 \iff x < 2$ (答)

$$\log_{\sqrt{y}} 3 = \frac{\log_3 3}{\frac{1}{2} \log_3 y} = \frac{2}{\log_3 y} \quad (\text{答}) \quad \log_y 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 y} = \frac{4}{\log_3 y} \quad (\text{答})$$

$$\therefore 1 < \frac{1}{\log_3 y} + \frac{\log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\log_3 y} //$$

$$y > 1 \text{ のとき, } \log_3 y < \log_3 \left\{ 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\} // \iff y < 3 - \frac{3}{2}x \cdots \textcircled{1}$$

$$0 < y < 1 \text{ のとき, } \log_3 y > \log_3 \left\{ 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\} // \iff y > 3 - \frac{3}{2}x \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から求める領域は図の ① (答)

第 2 問

$g(x) = f(x - a) + 2a = (x - a)^3 - (x - a) + 2a$ であるから

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (x - a)^3 - (x - a) + 2a - (x^3 - x) \\ &= -3ax^2 + 3a^2x - a^3 + 3a \\ &= a(-3x^2 + 3ax - a^2 + 3) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$-3x^2 + 3ax - a^2 + 3 = 0$ が異なる 2 実解をもつことから

$$D = 9a^2 - 12(a^2 - 3) > 0 \iff a^2 - 12 < 0 \iff 0 < a < 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

$$g(x) - f(x) = -3a(x^2 - ax) - a^2 + 3a = -3a \left(x - \frac{1}{2}a \right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + 3a$$

$$x = \frac{a}{2} \quad (\text{答}) \text{ のとき, } \text{最大値: } \frac{a}{4}(12 - a^2) \quad (\text{答})$$

(2)

$$h(a) = \frac{1}{4}(12a - a^3) \text{ とおくと, } h'(a) = \frac{3}{4}(4 - a^2) = -\frac{3}{4}(a + 2)(a - 2)$$

a	0		2		
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$		↗	極大	↘	

$x = 2$ (答) のとき, 最大値: 4 (答)

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき,

$g(x) = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 8x$ である.

$g(x) - f(x) = 0$ から, $3x^2 - 3\sqrt{3} = 0$

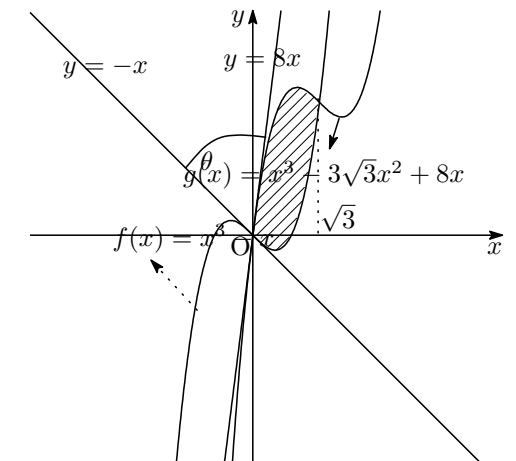
$\therefore x = 0, \sqrt{3}$

$P(0, 0), \quad Q(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}} -3\sqrt{3}x(x - \sqrt{3}) dx \\ &= -\left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{6} \right\} (\sqrt{3} - 0)^3 \\ &= \frac{9}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

また $\tan \beta = -1, \tan \alpha = 8$ とおいて

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\beta - \alpha)| = \left| \frac{-1 - 8}{1 + (-1) \cdot 8} \right| \\ &= \frac{9}{7} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



第3問

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 60$ を変形して

$$a_{n+1} + 30 = 3(a_n + 30)$$

数列 $\{a_n + 30\}$ は公比 3, 初項 $a_1 + 30 = 3$ の等比数列であるから,

$$a_n + 30 = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \therefore a_n = \mathbf{3^n - 30} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3^k - 30) \\ &= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - 30n = \frac{3}{2}(3^n - 1) - 30n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$S_n > 0 \iff \frac{3}{2}(3^n - 1) - 30n > 0$$

$$\therefore 3^n - 1 > 20n \iff \mathbf{n = 5} \quad (\text{答})$$

与えられた条件から

$$2b_n + c_n = 0 + (n-1)d = (n-1)d \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_n - 2c_n = x \cdot r^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore 5b_n = 2(n-1)d + x \cdot r^{n-1} \quad \therefore b_n = \frac{2}{5}d(n-1) + \frac{x}{5}r^{n-1}$$

$$5c_n = (n-1)d - 2x \cdot r^{n-1} \quad \therefore c_n = \frac{1}{5}d(n-1) - \frac{2}{5}x \cdot r^{n-1}$$

$$\therefore b_n + c_n = \frac{3}{5}d(n-1) - \frac{1}{5}x \cdot r^{n-1} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} a_n &= (b_{n+1} + c_{n+1}) - (b_n + c_n) \\ &= \left\{ \frac{3}{5}dn - \frac{1}{5}x \cdot r^n \right\} - \left\{ \frac{3}{5}d(n-1) - \frac{1}{5}x \cdot r^{n-1} \right\} \\ &= \frac{3}{5}d + \frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\therefore r = \mathbf{3}, \quad \frac{1}{5}x \cdot (-2) = 3 \iff x = -\frac{15}{2}$$

$$\frac{3}{5}d = -30 \quad \therefore d = \mathbf{-50} \quad (\text{答})$$

$$b_n = -\frac{3^n}{2} - 20(n-1) \quad (\text{答})$$

$$c_n = \mathbf{3^n - 10(n-1)} \quad (\text{答})$$

第4問

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{OE} &= (1-a)\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB} \\ &= (1-a)(1, 0, 0) + a(0, 1, 1) = (1-a, a, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= (1-a)\overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OD} \\ &= (1-a)(1, 0, 1) + a(-2, -1, -2) = (1-3a, -a, 1-3a) \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \mathbf{(-2a, -2a, 1-4a)} \quad (\text{答})$$

$$\text{また, } \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = a - a + 1 - 4a = 0 \quad \therefore \mathbf{a = \frac{1}{4}} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad a = \frac{1}{4} \text{ のとき, } \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OE} + b\overrightarrow{EF} \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}b, 0 \right) \\ &= \left(\frac{3-2b}{4}, \frac{1-2b}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BH} = s\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = (s, 1-s, 1) \text{ であり,}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OH} = t \left(\frac{3-2b}{4}, \frac{1-2b}{4}, \frac{1}{4} \right) \text{ であるから}$$

$$s = t \left(\frac{3-2b}{4} \right), \quad 1-s = t \left(\frac{1-2b}{4} \right), \quad 1 = \frac{1}{4}t \quad \therefore t = 4$$

$$\therefore \mathbf{b = \frac{3}{4}, \quad s = \frac{3}{2}, \quad t = 4} \quad (\text{答})$$

$$\mathbf{H : \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)} \quad (\text{答})$$

点 H は 線分 BC を, $\mathbf{3:1}$ に外分する (答)