

2004年 岡山大学 理系
(数学Ⅱ・Ⅲ・A・B・C)

第1問

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) A^2, A^3, A^6 を求めよ。(答のみでよい)
- (2) $A^n = xA$ を満たす1より大きい最小の整数 n と実数 x を求めよ。
- (3) A^{120} を求めよ。

第2問

数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1$ を a_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n^2 + a_n - 1$ で定める。このとき、 b_{2n-1} は正、 b_{2n} は負であることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ について、不等式

$$a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a_{2n-1}$$

が成り立つことを示せ。

2004年 岡山大学 理系
(数学Ⅱ・Ⅲ・A・B・C)

第3問

次の条件 (a), (b) をともに満たす実数の組 (p, q, r) をすべて求めよ。

(a) p, q, r の絶対値は等しい。

(b) 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ は絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

第4問

座標空間に定点 $A(1, 0, 0)$ をとる。点 $P(x, y, z)$ から yz 平面へ下ろした垂線の足を H とする。 $k > 1$ である定数 k に対して、 $PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき、次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで、 $y \geq 0$ かつ $z = 0$ を満たす部分を C とする。 S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。

2004年 岡山大学 理系
(数学Ⅱ・Ⅲ・A・B・C) == 解答 ==

2004.2.26

第 1 問 (解答例)

一般に、正の整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を示す。

$n = 1$ のとき、明らか。 $n = k$ のとき、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ と仮定すると

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}$$

よって、上記の①は成り立つ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}} \text{ (答)}$$

$$A^3 = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}} \text{ (答)}$$

$$A^6 = 2^3 \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}}} \text{ (答)}$$

(2) (1) より

$$A^{12} = 2^6 \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = -2^6 E, \quad \therefore A^{13} = -2^6 A \text{ であるから,}$$

$$\underline{\underline{n = 13 \text{ で最小, } x = -2^6 = -64 \text{ (答)}}}$$

(3)

$$A^{120} = (A^{12})^{10} = (-2^6 E)^{10} = 2^{60} E = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2^{60} & 0 \\ 0 & 2^{60} \end{pmatrix}}} \text{ (答)}$$

第 2 問 (解答例)

(1)

$$a_n > 0 \text{ であるから, } a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 + a_n - 1 = \frac{1}{(a_n + 1)^2} + \frac{1}{a_n + 1} - 1 = -\frac{a_n^2 + a_n - 1}{(a_n + 1)^2} \quad (\text{答})$$

(2)

(1) より,

$$b_{n+1} = -\frac{1}{(a_n + 1)^2} b_n \text{ で, } -\frac{1}{(a_n + 1)^2} < 0 \text{ であるから}$$

n の偶・奇によって, b_n の符号が変わることは明らかである。

$$\text{いま, } n = 1 \text{ のとき, } b_1 = a_1^2 + a_1 - 1 = 1 > 0, \quad b_2 = -\frac{1}{(a_1 + 1)^2} b_1 = -\frac{1}{4} < 0$$

$n = 2k - 1$ のとき, $b_n > 0$ $n = 2k$ のとき, $b_n < 0$ と仮定すると

$n = 2k + 1$ のとき, $b_n > 0$ かつ, $n = 2k + 2$ のとき, $b_n < 0$ となり題意は示された。(終)

(3)

(2) より,

$$b_{2n-1} = a_{2n-1}^2 + a_{2n-1} - 1 > 0, \quad b_{2n} = a_{2n}^2 + a_{2n} - 1 < 0 \text{ であるから,}$$

$$a_{2n-1} > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because a_{2n-1} > 0) \cdots \textcircled{1}$$

$$0 < a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より,

$$a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a_{2n-1} \quad (\text{終})$$

第 3 問 (解答例)

条件 (b) より, この 3 つの解を, $\cos \theta + i \sin \theta$, $\cos \theta - i \sin \theta$, α とおく。 (α は実数で, $\sin \theta \neq 0$)
解と係数の関係から

$$\begin{cases} (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) + \alpha = -p & \therefore 2 \cos \theta + \alpha = -p \cdots \textcircled{1} \\ 1 + \alpha(\cos \theta + i \sin \theta) + \alpha(\cos \theta - i \sin \theta) = q & \therefore 1 + 2\alpha \cos \theta = q \cdots \textcircled{2} \\ 1 \cdot \alpha = -r & \therefore \alpha = -r \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

条件 (a) と ①, ② から

$$|p| = |q| \iff p^2 = q^2 \iff (2 \cos \theta + \alpha)^2 = (1 + 2\alpha \cos \theta)^2 \iff (4 \cos^2 \theta - 1)(1 - \alpha^2) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \frac{1}{2}, \text{ または, } \alpha = \pm 1$$

$$(i) \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ のとき, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 1 + \alpha = -p = q$$

$$r^2 = p^2 \text{ より, } \alpha^2 = (1 + \alpha)^2 \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2} \quad \therefore (p, q, r) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(ii) \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ のとき, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 1 - \alpha = p = q$$

$$r^2 = p^2 \text{ より, } \alpha^2 = (1 - \alpha)^2 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore (p, q, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$(iii) \alpha = 1 \text{ のとき, } r = -1 \text{ であるから, } (1 + 2 \cos \theta)^2 = 1 \quad \therefore \cos \theta = 0, -1$$

$$\cos \theta = 0 \text{ のとき, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } p = -1, q = 1 \quad \therefore (p, q, r) = (-1, 1, -1)$$

$\cos \theta = -1$ のとき, $\sin \theta = 0$ となり不適。

$$(iv) \alpha = -1 \text{ のとき, } r = 1 \text{ であるから, } (1 - 2 \cos \theta)^2 = 1 \quad \therefore \cos \theta = 0, 1$$

$$\cos \theta = 0 \text{ のとき, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } p = 1, q = 1 \quad \therefore (p, q, r) = (1, 1, 1)$$

$\cos \theta = 1$ のとき, $\sin \theta = 0$ となり不適。

以上より, 求める (p, q, r) の組は

$$(p, q, r) = \left(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), (\pm 1, 1, \pm 1) \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{答})$$

第 4 問 (解答例)

(1)

$$\text{PH} : \text{PA} = k : 1 \iff k^2 \text{PA}^2 = \text{PH}^2 \iff k^2 \{(x-1)^2 + y^2 + z^2\} = x^2$$

$$\iff (k^2 - 1)x^2 - 2k^2x + k^2y^2 + k^2z^2 + k^2 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$$

① を満たす点 (x, y, z) から, x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ への距離の平方は

$$(x-x)^2 + y^2 + z^2 = \frac{-(k^2-1)x^2 + 2k^2x - k^2}{k^2} = \frac{-(k^2-1)\left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right)^2 + \frac{k^2}{k^2-1}}{k^2}$$

よって, $y^2 + z^2$ は $x = \frac{k^2}{k^2-1}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{k^2-1}$ をとる。

よって求める距離の最大値は, $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ (答)

(2)

(1) の図形は楕円球であり, $z = 0, y \geq 0$ の部分において x を固定すると, 半径 r を $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ の範囲で x 軸周りに回転すればよい。

よって, S は題意の図形である。(終)

(3)

x の範囲を求めて

$$-(k^2-1)x^2 + 2k^2x - k^2 \geq 0 \iff (k+1)(k-1)x^2 - 2k^2 + k^2 \leq 0 \iff \{(k+1)x - k\}\{(k-1)x - k\} \leq 0$$

$$\iff \frac{k}{k+1} \leq x \leq \frac{k}{k-1} \text{ である。}$$

$$z = 0 \text{ とおくと, } y^2 = \frac{1}{k^2} \{-(k^2-1)x^2 + 2k^2x - k^2\}$$

求める図形の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}} y^2 dx \\ &= \pi \int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{k^2} \{-(k^2-1)x^2 + 2k^2x - k^2\} dx \\ &= \frac{\pi(k^2-1)}{6k^2} \left(\frac{k}{k-1} - \frac{k}{k+1} \right)^3 = \frac{\pi(k^2-1)}{6k^2} \cdot \frac{8k^3}{(k^2-1)^3} \\ &= \frac{4k\pi}{3(k^2-1)^2} \text{ (答)} \end{aligned}$$